

François Sauvageot

Petits problèmes de géométries et d'algèbre

Issus des concours d'entrée
à l'Ecole normale supérieure de Cachan



Springer

Table des matières

Avant-propos	VII
Chapitre 1. Énoncés des 29 petits problèmes	1
§1. Égalités — méthodes algébriques	1
§2. Égalités — méthodes transcendentes	5
§3. Invariants et autres caractérisations	8
§4. Problèmes de densité	13
§5. Géométrie du « continu »	16
§6. Algèbre linéaire, quadratique ou multilinéaire	19
Chapitre 2. Énoncés du problème et des compléments	23
Chapitre 3. Solutions des 29 petits problèmes	32
1 — Une équation diophantienne cubique	33
2 — Résolution des équations de degré 4	37
3 — Théorie de Galois élémentaire	43
4 — Théorème de Fermat pour les polynômes	45
5 — Une équation matricielle	50
6 — Transcendance de e	53
7 — Racines carrées de -1 dans \mathbb{Q}_p	58
8 — Zéros de certaines séries de Fourier	64
9 — Sur l'inégalité arithmético-géométrique	67
10 — Dimension de Hausdorff d'un compact de \mathbb{R}^n	71
11 — Ensembles semi-algébriques	76
12 — Coordonnées de Plücker des plans de \mathbb{R}^4	80
13 — Polygones à sommets entiers	83
14 — Pavages par des losanges	87
15 — Porisme de Steiner	93
16 — Densité des points rationnels d'une sphère	96
17 — Principe d'approximation forte	101
18 — Autour du théorème de Weierstraß-Stone	105
19 — Autour du théorème de Dirichlet	110
20 — Racines carrées continûment différentiables	114
21 — Polynômes hyperboliques	116
22 — Sur les surfaces minimales	119
23 — Le théorème de Brouwer en dimension 2	124
24 — Matrices de Householder	127
25 — Déterminants de Vandermonde lacunaires	130
26 — Caractérisation des fractions rationnelles	131
27 — Le théorème de Banach-Steinhaus	134
28 — Caractères de $\mathcal{C}(\mathcal{K}, \mathbb{R})$	136

29 – Théorème de Pascal généralisé	138
Chapitre 4. Solutions du problème et des compléments	141
Chapitre 5. Indications pour les 29 petits problèmes	162
Index	171