

François Sauvageot

# Petits problèmes de géométries et d'algèbre

Issus des concours d'entrée  
à l'Ecole normale supérieure de Cachan



Springer

# Table des matières

Avant-propos .....	VII
<b>Chapitre 1. Énoncés des 29 petits problèmes .....</b>	<b>1</b>
§1. Égalités — méthodes algébriques .....	1
§2. Égalités — méthodes transcendantes .....	5
§3. Invariants et autres caractérisations .....	8
§4. Problèmes de densité .....	13
§5. Géométrie du « continu » .....	16
§6. Algèbre linéaire, quadratique ou multilinéaire .....	19
<b>Chapitre 2. Énoncés du problème et des compléments .....</b>	<b>23</b>
<b>Chapitre 3. Solutions des 29 petits problèmes .....</b>	<b>32</b>
1 — Une équation diophantienne cubique .....	33
2 — Résolution des équations de degré 4 .....	37
3 — Théorie de Galois élémentaire .....	43
4 — Théorème de Fermat pour les polynômes .....	45
5 — Une équation matricielle .....	50
6 — Transcendance de $e$ .....	53
7 — Racines carrées de $-1$ dans $\mathbb{Q}_p$ .....	58
8 — Zéros de certaines séries de Fourier .....	64
9 — Sur l'inégalité arithmético-géométrique .....	67
10 — Dimension de Hausdorff d'un compact de $\mathbb{R}^n$ .....	71
11 — Ensembles semi-algébriques .....	76
12 — Coordonnées de Plücker des plans de $\mathbb{R}^4$ .....	80
13 — Polygones à sommets entiers .....	83
14 — Pavages par des losanges .....	87
15 — Porisme de Steiner .....	93
16 — Densité des points rationnels d'une sphère .....	96
17 — Principe d'approximation forte .....	101
18 — Autour du théorème de Weierstraß-Stone .....	105
19 — Autour du théorème de Dirichlet .....	110
20 — Racines carrées continûment différentiables .....	114
21 — Polynômes hyperboliques .....	116
22 — Sur les surfaces minimales .....	119
23 — Le théorème de Brouwer en dimension 2 .....	124
24 — Matrices de Householder .....	127
25 — Déterminants de Vandermonde lacunaires .....	130
26 — Caractérisation des fractions rationnelles .....	131
27 — Le théorème de Banach-Steinhaus .....	134
28 — Caractères de $\mathcal{C}(\mathcal{K}, \mathbb{R})$ .....	136

29 – Théorème de Pascal généralisé .....	138
<b>Chapitre 4. Solutions du problème et des compléments .....</b>	<b>141</b>
<b>Chapitre 5. Indications pour les 29 petits problèmes .....</b>	<b>162</b>
Index .....	171