

Indice

Prefazione

1	Linguaggio. Insiemi	1
1.1	Linguaggio	1
1.2	Insiemi	2
2	Numeri e proposizioni	9
2.1	I numeri naturali	9
2.1.1	Problemi di conteggio	12
2.2	I numeri primi	14
2.2.1	Codici e decodifiche	15
2.3	I numeri interi	17
2.4	I numeri razionali	17
2.4.1	La frazione generatrice	22
2.4.2	La numerazione	22
2.5	I numeri reali	24
2.5.1	Densità	25
2.5.2	Chiusura di un insieme rispetto alle operazioni . . .	26
2.6	Notazioni abbreviate	26
2.6.1	Esiste almeno uno	27
2.7	Implicazione e dimostrazione	27
2.7.1	Implicazione e equivalenza logica	27
2.7.2	Il teorema	30
2.7.3	<i>Tertium non datur</i>	33
2.7.4	Ci sono dimostrazioni e dimostrazioni	34
2.7.5	Dimostrazioni “visuali”	36
2.7.6	Il teorema inverso	38

2.7.7	Irrazionalità di $\sqrt{2}$	39
2.7.8	La scuola pitagorica	41
2.7.9	Ancora sul teorema di Pitagora	42
2.8	Il metodo induttivo e il principio di induzione	43
2.8.1	Condizione necessaria. Condizione sufficiente	47
2.9	La congettura	48
2.10	Ancora un ragionamento “visuale”	50
2.11	Matematica e cultura	51
2.11.1	Lo studio individuale e il lavoro	53
3	Relazioni	55
3.1	Sul concetto di relazione	55
3.2	Prodotto cartesiano di insiemi. Relazioni	57
3.2.1	Proprietà delle relazioni	60
3.3	Relazioni di ordine	62
3.3.1	L’insieme delle parti	63
3.3.2	Ordine totale	63
3.4	Relazione di preferenza	64
3.5	Relazione di equivalenza	65
3.5.1	Partizioni di un insieme	67
4	Geometria euclidea	69
4.1	Introduzione	69
4.1.1	Primi assiomi	70
4.1.2	Nomenclatura. Ulteriori assiomi	72
4.1.3	Rifondazione della geometria	75
4.2	Figure geometriche	77
4.2.1	Figure convesse e figure concave	77
4.2.2	Angoli	79
4.2.3	Relazioni tra rette e piani nello spazio	83
4.2.4	Relazioni tra piani nello spazio	86
4.2.5	Proiezioni	87
4.2.6	Angolo di una retta con un piano	91
4.2.7	Diedri	91
4.2.8	Piani perpendicolari	93
4.2.9	Simmetrie	94
4.2.10	Poligoni simili	96
4.3	Il teorema di Talete	96

5	Insiemi numerici	103
5.1	La retta reale	103
5.1.1	Uguaglianze, identità e equazioni	107
5.1.2	Tradurre un problema in un'equazione	111
5.2	Ordine dei numeri reali	112
5.2.1	Tradurre un problema in una disequazione	114
5.3	Intervalli, distanze, intorno, valore assoluto	115
5.3.1	Un'equazione e una disequazione con valore assoluto	120
5.4	Insieme ampliato dei numeri reali	121
5.5	Insiemi limitati. Estremi di insiemi numerici	123
5.6	Insiemi separati. Insiemi contigui	127
6	Funzioni	129
6.1	Generalità	129
6.1.1	Funzioni suriettive, iniettive, biunivoche	132
6.2	Insiemi equipotenti. Insiemi infiniti, insiemi finiti	136
6.2.1	Insiemi finiti, infiniti, limitati	138
6.3	Hotel Hilbert	138
6.4	Funzioni composte	140
6.5	Restrizione di una funzione	141
7	La funzione lineare e la retta	143
7.1	Il piano cartesiano	143
7.1.1	Distanza	145
7.1.2	Funzioni reali di una variabile reale	146
7.1.3	Grafico e curva	148
7.2	La funzione lineare	149
7.2.1	La funzione costante	149
7.2.2	La funzione identica	150
7.2.3	La funzione $f(x) = kx$	150
7.2.4	Retta passante per l'origine. Sommario	152
7.2.5	La funzione $f(x) = kx + n$	153
7.2.6	Ancora sulla rappresentazione della retta. L'equazione lineare	154
7.2.7	Ancora sulla rappresentazione della retta. Le equazioni parametriche della retta	155
7.3	Parallelismo di rette	158
7.3.1	Rette rappresentate da equazioni parametriche	158

7.3.2	Rette rappresentate da equazioni ordinarie	160
7.4	La funzione valore assoluto	163
7.5	Un modello lineare	163
7.6	Funzioni invertibili e funzioni inverse	164
7.7	Nozione di algoritmo	166
7.7.1	Conclusione	170
8	Le funzioni circolari	171
8.1	Introduzione	171
8.1.1	L'equazione della circonferenza	171
8.1.2	La circonferenza goniometrica	174
8.1.3	Le funzioni seno, coseno e tangente	177
9	Vettori numerici e vettori geometrici	185
9.1	Grandezze scalari e grandezze vettoriali	185
9.2	n -ple di numeri reali	187
9.2.1	Combinazioni lineari di vettori numerici	189
9.3	Vettori liberi e vettori applicati	191
9.3.1	Addizione di vettori liberi	194
9.3.2	Moltiplicazione di uno scalare per un vettore libero	196
9.4	Lato di chiusura di un poligono	196
9.5	Proprietà delle operazioni con i vettori liberi	197
9.6	Componenti di un vettore del piano	199
9.7	Riferimento cartesiano e vettori dello spazio	201
9.8	Versori	203
9.9	Equazione della sfera	205
10	Prodotto scalare. Rette e piani	207
10.1	Introduzione	207
10.2	Prodotto scalare di vettori liberi	207
10.3	Prodotto scalare e ortogonalità	209
10.3.1	Perpendicolarità tra rette	210
10.4	L'equazione del piano	211
10.5	Rette dello spazio	213
10.6	Esercizi	215

11 Sistemi di equazioni lineari. Metodi di riduzione	217
11.1 Sistemi di equazioni lineari	217
11.2 Sistemi equivalenti	220
11.2.1 Operazioni sulle equazioni	222
11.3 Riduzione di un sistema	224
11.3.1 Riepilogo	229
11.3.2 Caso 3. Generalizzazione	229
11.4 Riduzione di un sistema. Esempi	231
12 Spazi vettoriali	235
12.1 I numeri complessi	235
12.2 Operazioni	237
12.3 Campi	238
12.4 Spazi vettoriali	239
12.5 Dipendenza e indipendenza lineare	242
12.6 Spazi vettoriali finitamente generabili	246
12.7 Dimensione	247
12.8 Isomorfismo	249
12.9 Sottospazi vettoriali	250
12.9.1 Sistemi di generatori	251
12.10 Identificazione degli spazi vettoriali geometrici e numerici .	252
12.10.1 Prodotto scalare	253
12.11 Esercizi	253
13 Matrici	257
13.1 Generalità	257
13.1.1 Sistemi di equazioni e matrici	259
13.2 Matrici ridotte	260
13.3 Rango di una matrice	262
13.4 Metodo di riduzione per le matrici e rango	264
13.5 Teorema di Rouché e Capelli	266
13.5.1 Matrici quadrate	267
14 Determinanti e sistemi di equazioni lineari	269
14.1 Determinanti	269
14.2 Proprietà dei determinanti	273
14.3 Matrici estratte e minori	274
14.4 Complemento algebrico	275

14.5	Prodotto di matrici	276
14.6	Matrice inversa e matrice trasposta	279
14.7	Sistemi di equazioni lineari in forma matriciale	281
14.8	Rango di una matrice e minori	282
14.8.1	Se A ha un minore diverso da zero di ordine p massimo	284
14.9	Regola di Cramer	286
14.9.1	Sistemi lineari omogenei	288
14.9.2	Sistema lineare omogeneo associato	289
14.10	Esercizi	291
15	Rette e piani	303
15.1	Introduzione	303
15.2	Rette parallele	303
15.3	Rette complanari, rette sghembe	305
15.4	Retta parallela a un piano. Rette perpendicolari. Piani perpendicolari	305
15.5	Esercizi	307
15.5.1	Intersezione di due piani	309
15.6	Fasci di piani	312
15.7	Esercizi	314
16	Funzioni elementari	321
16.1	Introduzione	321
16.2	Funzioni monotone	321
16.3	Funzioni invertibili e funzioni inverse	322
16.4	La potenza	323
16.4.1	Definizione	323
16.4.2	Potenza con esponente intero non nullo	326
16.4.3	Esponente nullo	329
16.5	Funzioni pari, funzioni dispari	329
16.6	La radice	331
16.7	Potenza con esponente reale	334
16.8	La funzione esponenziale	335
16.8.1	Il numero di Nepero	338
16.9	Il logaritmo	339
16.10	Conclusione	342

17 Limiti	343
17.1 Introduzione	343
17.2 Definizione	344
17.2.1 Casi particolari	345
17.2.2 Unicità del limite	355
17.3 Limiti delle funzioni elementari	356
17.3.1 Quando il denominatore è piccolo	358
17.4 Proprietà dei limiti	359
17.4.1 Operazioni	359
17.4.2 Permanenza del segno	363
17.4.3 Confronto	364
17.4.4 Limite della funzione composta	366
17.4.5 Limite destro, limite sinistro	367
17.4.6 Ancora sui limiti delle funzioni elementari	369
18 Continuità	373
18.1 Funzioni continue	373
18.2 Proprietà delle funzioni continue	375
18.3 Discontinuità	378
18.4 Convenzione del dominio	381
18.5 Curva	381
18.6 Funzioni inverse delle funzioni continue	382
18.7 Le funzioni inverse delle funzioni circolari	383
18.7.1 La funzione arcoseno	383
18.7.2 La funzione arcocoseno	383
18.7.3 La funzione arcotangente	384
18.8 Continuità delle funzioni elementari	384
19 Derivate. Differenziali	385
19.1 Introduzione	385
19.2 Definizione	386
19.3 Significato geometrico della derivata	387
19.4 Prime proprietà	388
19.4.1 Derivate di alcune funzioni elementari	389
19.4.2 Rapidità istantanea di variazione	391
19.5 Operazioni sulle derivate	392
19.6 Derivate delle funzioni composte	393
19.7 Regole di derivazione	394

19.7.1	Sulla derivata della funzione esponenziale	395
19.8	Derivata destra e derivata sinistra	395
19.8.1	Derivate di ordine superiore	397
19.9	Infinitesimi e infiniti	398
19.9.1	Infinitesimi	398
19.9.2	Infiniti	400
19.10	Differenziale	401
19.11	Approssimazione	403
19.12	Parabola con asse verticale	405
19.13	Formula di Taylor	406
20	Teoremi del calcolo. Grafici	411
20.1	Introduzione	411
20.2	Punti di minimo relativo e di massimo relativo	412
20.3	Teoremi di Fermat e di Rolle	414
20.4	Teorema di Lagrange e sue conseguenze	416
20.5	Osservazioni sul Teorema di Fermat	419
20.5.1	Test della derivata seconda. Ricerca del massimo e del minimo di una funzione	420
20.6	La regola di de l'Hospital	421
20.7	Ancora sulle forme indeterminate	424
20.8	Convessità, concavità, flesso	426
20.8.1	Convessità e concavità. Definizioni	426
20.9	Oggetti defilati	430
20.9.1	Il piano di sito	431
20.10	Asintoti	432
20.10.1	Asintoti verticali	433
20.10.2	Asintoti orizzontali	433
20.10.3	Asintoti obliqui	435
20.11	Studio del grafico di una funzione	437
21	Integrazione	441
21.1	Introduzione	441
21.2	L'integrale definito	442
21.3	Area di un insieme piano	445
21.4	Area del rettangoloide	448
21.5	La funzione integrale	449
21.6	Le funzioni primitive	451

21.7	L'integrale indefinito	455
21.7.1	Integrali indefiniti immediati	455
21.7.2	Integrali indefiniti che si risolvono con semplici trasformazioni	456
21.8	Integrazione per parti	459
21.9	Dominio normale	461
21.10	Identità trigonometriche. Sostituzioni trigonometriche . . .	463
21.10.1	Sostituzioni trigonometriche	464
21.11	Integrali impropri	464
21.11.1	Integrali impropri di primo tipo	465
21.11.2	Integrali impropri di secondo tipo	467
21.11.3	Un integrale improprio di primo tipo	469
21.12	Esercizi sugli integrali	470
21.12.1	Integrali indefiniti	470
21.12.2	Integrali indefiniti	474
21.12.3	Integrali definiti	476
21.12.4	Calcolare i seguenti integrali	476
21.12.5	Calcolo di area	478
22	Funzioni di più variabili	479
22.1	Introduzione	479
22.2	Lo spazio n -dimensionale reale	481
22.3	Esempi di funzioni di più variabili	484
22.4	Funzioni reali di due variabili reali	485
22.5	Ancora sul dominio di $f(x, y)$	488
22.6	Sul grafico della funzione $z = f(x, y)$	490
22.7	Curve di livello	490
22.8	Funzioni limitate	493
22.9	Limiti	494
22.10	Continuità	497
22.11	Derivate parziali	500
22.12	Esercizi. Domini, curve di livello	502
22.13	Esercizi. Derivate parziali	504
22.14	Derivate parziali delle funzioni di tre o più variabili	505
23	Derivate e curve	507
23.1	Relazioni tra continuità e derivabilità	507
23.2	Derivate parziali del secondo ordine	509

23.2.1	Esercizi	510
23.3	Curve	512
23.4	Retta tangente a una curva	516
23.4.1	Curva chiusa	518
23.5	Lunghezza di una curva	519
23.5.1	Ascissa curvilinea	520
23.6	Derivata di una funzione composta	521
23.7	Funzioni implicite	523
24	Cilindri e coni	529
24.1	Generalità sulle superfici	529
24.2	Cilindri	531
24.3	Coni	533
24.3.1	Polinomio omogeneo	535
24.4	Esercizi	536
25	Differenziali e Superfici	541
25.1	Introduzione	541
25.2	Differenziabilità. Differenziale	542
25.3	Sommario delle proprietà relative a continuità, derivabilità e differenziabilità	544
25.4	Sezioni verticali di una superficie	544
25.5	Piano tangente a una superficie	546
25.6	Dimostrazione del Teorema 25.1	547
26	Massimi e minimi. Estremi vincolati	551
26.1	Introduzione	551
26.2	Massimi relativi e minimi relativi	552
26.2.1	Esercizi	554
26.3	Ricerca di massimi relativi e minimi relativi	554
26.4	Massimi assoluti e minimi assoluti	558
26.5	Ricerca di massimo e minimo di una funzione continua	560
26.6	Estremi vincolati	561
26.7	Il metodo del moltiplicatore di Lagrange	561
26.8	Gradiente	564
26.9	Derivate direzionali	567

27 Equazioni differenziali	575
27.1 Generalità	575
27.1.1 Spazio, tempo, velocità. Moto rettilineo	575
27.1.2 Generica equazione oraria	576
27.1.3 Posizione del punto mobile	577
27.2 Equazioni differenziali	578
27.3 Crescita e decrescita esponenziale	581
28 Integrale delle funzioni di due variabili	583
28.1 Area di un insieme piano	583
28.2 Volume di un solido	585
28.3 Cilindroide	587
28.4 Integrale doppio	587
28.5 Proprietà dell'integrale doppio	589
28.6 Formule di riduzione dell'integrale doppio	590
Bibliografia	605
Cenni biografici	609