

Indice

Premessa 1

Notazione e simbologia 3

- 0.1 Notazione matriciale 3
- 0.2 Notazione tensoriale 4
- 0.3 Operazioni tensoriali in notazione matriciale 7

Capitolo 7 La teoria delle travi 9

- 7.1 Le teorie strutturali 9
- 7.2 Cinematica e statica della trave piana (rettilinea) 11
 - 7.2.1 Premessa 11
 - 7.2.2 Modello cinematico 11
 - 7.2.3 Definizione delle variabili statiche corrispondenti 13
 - 7.2.4 Le condizioni di equilibrio 16
 - 7.2.5 Considerazioni e commenti 18
- 7.3 Il comportamento elastico 19
 - 7.3.1 Il legame elastico-lineare e isotropo per la trave 19
 - 7.3.2 Formulazione del problema elastico 22
 - 7.3.3 L'equazione della linea elastica 26
 - 7.3.4 Le equazioni di Müller-Breslau 36
 - 7.3.5 Aspetti energetici del comportamento 42
 - 7.3.5.1 Energie potenziale e complementare 42
 - 7.3.5.2 Stazionarietà dell'Energia Complementare Totale 44
 - 7.3.5.3 Il teorema di Castigliano 45
 - 7.3.6 Considerazioni sul modello di trave 47
- 7.4 Il limite elastico 49
- 7.5 La trave elasto-plastica 52
 - 7.5.1 Flessione retta 52
 - 7.5.1.1 La sezione rettangolare 52
 - 7.5.1.2 Tensioni residue allo scarico 57

- 7.5.1.3 Sezioni semplicemente simmetriche e sollecitazioni composte 57
- 7.5.2 Un esempio di calcolo 59
- 7.6 Aste presso-inflesse 63
 - 7.6.1 Necessità di rimuovere l'ipotesi di piccoli spostamenti 63
 - 7.6.2 L'equilibrio della trave nella sua configurazione deformata 66
 - 7.6.3 La trave elastica 68
 - 7.6.3.1 Formulazione generale 68
 - 7.6.3.2 Travi assialmente isostatiche 69
 - 7.6.3.2.1 La trave di Timoshenko 69
 - 7.6.3.2.2 L'equazione della linea elastica per travi presso-inflesse 72
 - 7.6.3.3 Considerazioni sul comportamento di travi presso-inflesse 78
- Esercizi 80
- Bibliografia 84

Capitolo 8 Profili in parete sottile 85

- 8.1 Limiti del principio di equivalenza elastica 85
- 8.2 Torsione elastica di profili aperti in parete sottile 86
 - 8.2.1 Torsione non uniforme 86
 - 8.2.2 La sezione a I 91
 - 8.2.3 Rigidità torsionali di profili aperti 94
 - 8.2.4 L'equazione della torsione 97
 - 8.2.5 Esempi di soluzione 99
 - 8.2.5.1 Integrazione dell'equazione della torsione 99
 - 8.2.5.2 La mensola sollecitata all'estremo libero 100
 - 8.2.5.3 La trave soggetta a m , costante 105
- 8.3 La teoria delle aree settoriali 108
 - 8.3.1 Relazioni cinematiche e statiche 108
 - 8.3.1.1 Il modello cinematico 108
 - 8.3.1.2 Definizione delle variabili statiche associate 113
 - 8.3.1.3 Le condizioni di equilibrio 116
 - 8.3.2 Il comportamento elastico 119
 - 8.3.3 Il contributo della torsione primaria 122
 - 8.3.4 Un esempio - La trave a C soggetta al proprio peso 125
 - 8.3.4.1 Comportamento deformativo 125
 - 8.3.4.2 Il regime tensionale 129
 - 8.3.5 Considerazioni operative 137
- 8.4 Considerazioni conclusive 139
 - 8.4.1 Sezioni compatte e profili chiusi 139

- 8.4.2 Applicazioni in campo inelastico 140
- Esercizi 143
- Bibliografia 145

Capitolo 9 Le piastre inflesse 147

- 9.1 Le lastre piane 147
 - 9.1.1 Modello cinematico 147
 - 9.1.2 Forze e sforzi generalizzati 149
 - 9.1.3 Le condizioni di equilibrio 150
 - 9.1.3.1 Considerazioni generali 150
 - 9.1.3.2 La lastra caricata nel suo piano 151
 - 9.1.3.3 Il problema flessionale 153
 - 9.1.4 Piastre assialsimmetriche 158
- 9.2 La piastra di Kirchhoff 163
 - 9.2.1 Formulazione del modello flessionale 163
 - 9.2.2 La piastra rettangolare 169
 - 9.2.3 La piastra assialsimmetrica 173
- 9.3 La piastra elastica 175
 - 9.3.1 Il legame elastico 175
 - 9.3.1.1 Formulazione 175
 - 9.3.1.2 La piastra omogenea e isotropa 177
 - 9.3.1.3 La piastra sandwich 180
 - 9.3.2 Il problema elastico per la piastra di Kirchhoff 182
 - 9.3.2.1 L'equazione di Sophie Germain-Lagrange 182
 - 9.3.2.2 La piastra assialsimmetrica 184
- 9.4 Alcuni esempi di soluzione 185
 - 9.4.1 Piastra circolare assialsimmetrica 185
 - 9.4.2 Le soluzioni classiche per la piastra di Kirchhoff 193
 - 9.4.2.1 Piastra rettangolare appoggiata sotto carico sinusoidale 193
 - 9.4.2.2 La soluzione di Navier per la piastra rettangolare appoggiata 198
 - 9.4.2.3 La soluzione di Lévy per la piastra appoggiata su due lati opposti 201
 - 9.4.3 Limiti dell'ipotesi di piccoli spostamenti 207
- 9.5 La formulazione di Von Kármán per la piastra inflessa in presenza di spostamenti moderatamente grandi 207
 - 9.5.1 Ipotesi cinematiche 207
 - 9.5.2 Le condizioni di equilibrio 209
 - 9.5.3 La piastra elastica, omogenea e isotropa a spessore costante 211
 - 9.5.4 Influenza di azioni membranali costanti per spostamenti piccoli nei confronti dello spessore 212

Esercizi 215
Bibliografia 217

Capitolo 10 Il metodo di Rayleigh-Ritz per strutture elastiche 219

- 10.1 Stazionarietà dell'energia potenziale totale 219
- 10.2 Il metodo di Rayleigh-Ritz 223
 - 10.2.1 Formulazione 223
 - 10.2.2 Cenni sui criteri di convergenza 232
- 10.3 Applicazioni a problemi specifici 236
 - 10.3.1 La formulazione puramente flessionale per la trave 236
 - 10.3.1.1 Soluzione di travi appoggiate mediante serie trigonometriche 236
 - 10.3.1.2 Altre condizioni di vincolo 242
 - 10.3.2 La trave di Timoshenko 247
 - 10.3.3 Torsione di profili aperti in parete sottile 250
 - 10.3.4 Piastre inflesse 256
 - 10.3.4.1 La piastra di Kirchhoff 256
 - 10.3.4.2 Piastre vincolate da travi di bordo 264
- 10.4 Considerazioni conclusive 267
 - Esercizi 269
 - Bibliografia 275

Capitolo 11 Il metodo degli elementi finiti: approccio agli spostamenti 277

- 11.1 Aspetti generali 277
 - 11.1.1 Introduzione 277
 - 11.1.2 Analisi matriciale di strutture reticolari 279
 - 11.1.3 Le successive fasi dell'approccio agli spostamenti 288
- 11.2 L'approccio agli spostamenti 290
 - 11.2.1 Il modello cinematico 290
 - 11.2.2 Forze nodali 297
 - 11.2.3 Cambiamento di riferimento 301
 - 11.2.4 Assemblaggio 303
- 11.3 Analisi elastica 309
 - 11.3.1 Proprietà elastiche di un elemento finito 309
 - 11.3.2 Assemblaggio e soluzione 314
 - 11.3.3 Formulazione energetica del problema elastico 318
- 11.4 Elementi di ordine elevato e isoparametrici 319
 - 11.4.1 Condizioni di convergenza 319
 - 11.4.2 Coordinate intrinseche 324
 - 11.4.2.1 Definizione 324

- 11.4.2.2 Funzioni di forma 326
- 11.4.3 Elementi isoparametrici 333
- 11.4.4 Integrazione numerica 339
- 11.4.5 Considerazioni generali sul procedimento 342
- 11.4.6 Cenni sulle modalità operative 344
- 11.5 Nonlinearità del materiale 348
 - 11.5.1 Metodi risolutivi per problemi nonlineari 348
 - 11.5.1.1 Il metodo di Newton-Raphson 348
 - 11.5.1.2 Applicazioni strutturali - Il comportamento elastico nonlineare 351
 - 11.5.1.3 I metodi delle deformazioni e degli sforzi iniziali 353
 - 11.5.2 Il comportamento elasto-plastico 361
 - 11.5.2.1 Legame incrementale 361
 - 11.5.2.2 Soluzione per elementi finiti 362
- Esercizi 366
- Bibliografia 371

Capitolo 12 Il metodo degli elementi finiti: sviluppi ulteriori 373

- 12.1 Limitazioni dell'approccio agli spostamenti 373
 - 12.1.1 Introduzione 373
 - 12.1.2 Problemi "vincolati" 373
 - 12.1.3 Effetti della distorsione geometrica 375
 - 12.1.4 Fenomeni di "locking" 377
- 12.2 La formulazione "naturale" dell'approccio agli spostamenti 378
 - 12.2.1 Sforzi e deformazioni generalizzati 378
 - 12.2.1.1 Moti rigidi e modi deformativi 378
 - 12.2.1.2 Sforzi generalizzati 388
 - 12.2.1.3 Relazioni con le variabili nodali 390
 - 12.2.2 Il comportamento elastico 391
 - 12.2.3 Integrazione numerica 394
 - 12.2.3.1 Considerazioni preliminari 394
 - 12.2.3.2 Integrazione completa, ridotta e selettiva 398
 - 12.2.4 Ricostruzione degli sforzi locali 404
 - 12.2.5 Considerazioni conclusive 407
- 12.3 Metodi misti 408
 - 12.3.1 Approccio basato sul teorema di Hellinger-Reissner 408
 - 12.3.1.1 Formulazione 408
 - 12.3.1.2 Modalità operative 411
 - 12.3.1.3 Connessioni con l'approccio agli spostamenti 413
 - 12.3.1.4 Teorema di limitazione e condizione di rango 414
 - 12.3.2 Ulteriori approcci misti 416

- 12.4 Cenni a modelli equilibrati e ibridi 423
 - 12.4.1 Formulazione in termini di funzione di sforzo 423
 - 12.4.2 Modellazione diretta degli sforzi 430
- 12.5 Considerazioni conclusive 431
 - Esercizi 433
 - Bibliografia 434

Appendice A Soluzioni degli esercizi proposti 437

Indice analitico 459

Premessa

Questo secondo volume del testo di *Meccanica delle Strutture* prosegue la trattazione svolta nel precedente *Il comportamento dei mezzi continui*, alla cui premessa si rimanda per l'inquadramento della materia. Per la sua comprensione sono indubbiamente richieste alcune conoscenze di base sulla statica e la cinematica dei solidi e sulle principali caratteristiche dei legami costitutivi. Si ritiene quindi opportuno accennare brevemente all'oggetto della trattazione e agli scopi che si prefigge.

Il modello continuo idealizza la struttura sostituendola con un solido opportunamente definito in termini statici e cinematici, aspetti duali tra cui il legame costitutivo instaura un collegamento meccanico. Anche nel caso più semplice, relativo alle piccole deformazioni di solidi elastici, le equazioni cui si perviene sono tuttavia risolvibili solo in alcuni casi particolari. Al superamento di queste difficoltà è rivolta la Meccanica delle Strutture propriamente intesa. Le caratteristiche geometriche di particolari solidi, quali travi, piastre e gusci, hanno suggerito l'introduzione di ipotesi che consentono formulazioni semplificate per specifiche tipologie strutturali. In questo volume vengono inizialmente affrontati i problemi della trave (Capitoli 7, 8) e delle piastre (Capitolo 9). Motivi di spazio hanno costretto a omettere i gusci, che sarebbe tuttavia riduttivo considerare una semplice generalizzazione.

Dal momento che l'aspetto cinematico del comportamento strutturale fornisce un più concreto supporto all'intuizione ingegneristica, le ipotesi alla base di queste formulazioni sono prevalentemente *modelli di spostamento*. È stata presto riconosciuta la possibilità di svincolare le ipotesi dalle particolari proprietà geometriche della struttura, stabilendo modelli che possono essere via via arricchiti in modo da assicurare la convergenza della soluzione a quella dell'originario problema continuo. Il metodo di Rayleigh-Ritz costituisce l'oggetto del Capitolo 10, che introduce queste metodologie con riferimento a problemi elastici.

Gli ultimi due capitoli sviluppano invece il metodo degli *Elementi Finiti* che, con l'ausilio dei mezzi di calcolo oggi disponibili, permette di risolvere con accuratezza del tutto adeguata praticamente qualunque problema strutturale. In quanto basati su modelli cinematici, questi metodi rappresentano una generalizzazione abbastanza spontanea delle teorie strutturali. La modellazione cinematica peraltro perde adesso il