Lecture Notes in Mathematics

A collection of informal reports and seminars

Edited by A. Dold, Heidelberg and B. Eckmann, Zürich

269

Théorie des Topos et Cohomologie Etale des Schémas

Springer-Verlag

Berlin · Heidelberg · New York 1972

AMS Subject Classifications (1970): 14-02, 14 A 15, 14 D 15, 14 E 20, 14 F 20, 18-02, 55 B 30

ISBN 3-540-05896-6 Springer-Verlag Berlin · Heidelberg · New York
ISBN 0-387-05896-6 Springer-Verlag New York · Heidelberg · Berlin

Offsetdruck: Julius Beltz, Hemsbach/Bergstr.

SEMINAIRE DE GEOMETRIE ALGEBRIQUE DU BOIS-MARIE

1963-1964

THEORIE DES TOPOS ET

COHOMOLOGIE ETALE DES SCHEMAS

(SGA 4)

Un séminaire dirigé par

M. ARTIN, A. GROTHENDIECK, J.L. VERDIER

Avec la collaboration de

N. BOURBAKI, P. DELIGNE, B. SAINT-DONAT

TOME 1

THEORIE DES TOPOS

(Exposés I à IV)

Préface à la deuxième édition

1. Comme le lecteur le verra dans l'Avant-propos de la première édition (incomplète) du présent Séminaire(qui suit cette préface), le but initial du Séminaire a été de développer la théorie de la cohomologie étale des schémas. D'autre part, depuis l'année ou a été développé le séminaire oral, l'importance du langage des topologies et des topos en géométrie algébrique est alléecroissant, tant pour fournir un cadre commode et intuitif pour les techniques de la descente et le passage au quotient (indispensables dans pratiquement toutes les questions de constructions de schémas), que pour développer d'autres théories cohomologiques pour les schémas, mieux adaptées à certaines questions que la cohomologie étale (telles la cohomologie fppf, ou la cohomologie "cristalline" des schémas). De plus, il semble maintenant probable que ce langage va être appelé à rendre des services également aux algébristes et aux topologues. C'est pourquoi le besoin d'un exposé assez systématique de ce langage, avec des notations et une terminologie aussi proches que possible de celles déjà couramment utilisés ailleurs (directement inspirés de la topologie), est allé également en croissant. La présente édition vise (en plus de son but initial déjà mentionné) à donner un tel exposé, qui puisse servir aussi bien comme texte de référence qu'au mathématicien désireux de s'initier au langage des topos, en attendant le jour où l'on disposera d'un traité plus complet. C'est ce changement de perspective qu'exprime le changement dans le titre du Séminaire par

rapport au titre primitif "cohomologie étale des schémas".

Pour les raisons qui précèdent nous avons entièrement refondus les exposés I à VI du Séminaire primitif, consacrés au langage des topologies et des topos. Notre principe directeur a été de développer un langage et des notations qui soient ceux qui servent déjà effectivement dans les diverses applications, de sorte à ne pas perdre contact avec le contenu "géométrique" (ou "topologique") des divers foncteurs qu'on est amené à considérer entre sites. Pour ceci, les notions de topos et de morphisme de topos semblent être le fil conducteur indispensable, et il convient de leur donner la place centrale, la notion de site devenant une notion technique auxiliaire. Cela nous a amené en particulier à étoffer considérablement l'exposé IV consacré à ces notions, et à reprendre complètement la rédaction de l'exposé VI (consacré aux sites et topos fibrés) dans cet esprit. Nous avons également augmenté l'exposé I consacré aux notions générales sur les catégories et les préfaisceaux, pour fournir les références internes nécessaires à la forme révisée du Séminaire.

2. En plus de ces modifications et additions substantielles par rapport au Séminaire sous sa forme initiale, signalons que la présente édition s'en distingue également par la présence des exposés XVII et XVIII sur la cohomologie à supports propres et le théorème de dualité globale. Ces exposés, dûs à P. DELIGNE, diffèrent assez substantiellement des exposés oraux de A. GROTHENDIECK, à divers titres. Ainsi, P. DELIGNE utilise la méthode de J.L. VERDIER en topologie pour la construction

directe du foncteur $f^!$ sans lissification préalable du morphisme f, et il donne une méthode de construction directe du foncteur $Rf_!$ de cohomologie à supports propres, sans compactification préalable du morphisme $f: X \longrightarrow Y$ séparé du type fini, grâce à l'utilisation de la fort utile "théorie de la descente cohomologique" ; cette dernière, qui relève de la topologie générale, à fait l'objet d'un nouvel exposé VI_B , rédigé par B. SAINT-DONAT, et son application à la construction directe de $Rf_!$ est exposée par SAINT-DONAT en appendice à l'exposé XVII. D'autre part, nous sommes redevables à P. DELIGNE d'une vérification soigneuse de très nombreuses compatibilités, qui avaient été admises purement et simplement par son prédécesseur moins scrupuleux, ceci lui a fourni d'ailleurs l'occasion, dans l'exposé XVII, de développer assez systématiquement un certain nombre de compléments à l'algèbre homologique et au formalisme des catégories dérivées, en assouplissant notamment le formalisme des foncteurs dérivés par l'utilisation systématique de la technique des ind et pro-objets ; à ce titre, les paragraphes 1, 2, 4 de XVII doivent être regardées comme des références standard d'algèbre homologique.

3. En plus de ces contributions de présentation et de mise au point de P. DELIGNE, cette réédition du Séminaire contient également un certain nombre de résultats qui lui sont dûs, dont voici les principaux :

a) La théorie de la descente cohomologique, déjà mentionnée, qui fait l'objet de l'exposé VI_B de SAINT-DONAT. Cette théorie s'est déjà avérée un instrument efficace de "passage du local au global", et de réduction de certaines propriétés cohomologiques des schémas à singularités au cas des schémas réguliers (lorsqu'on dispose de la résolution des singularités) ; le même principe doit pouvoir être utilisé pour les espaces analytiques de tous genres.(C'est ainsi qu'il a pu être utilisé dans le développement recent, par P. DELIGNE, d'une théorie de HODGE pour des variétés algébriques complexes à singularités quelconques.)

b) Un certain nombre de résultats de "topologie générale" i.e. sur les topos, notamment : l'existence de suffisamment de points pour un topos localement cohérent (VI 9) ; la stabilité de la notion de platitude d'un Module sur un topos par les foncteurs image inverse (V 8), qui lui donne l'occasion de développer une utile technique de "limites inductives locales" ; l'existence de 2-produits fibrés de topos (IV 15).

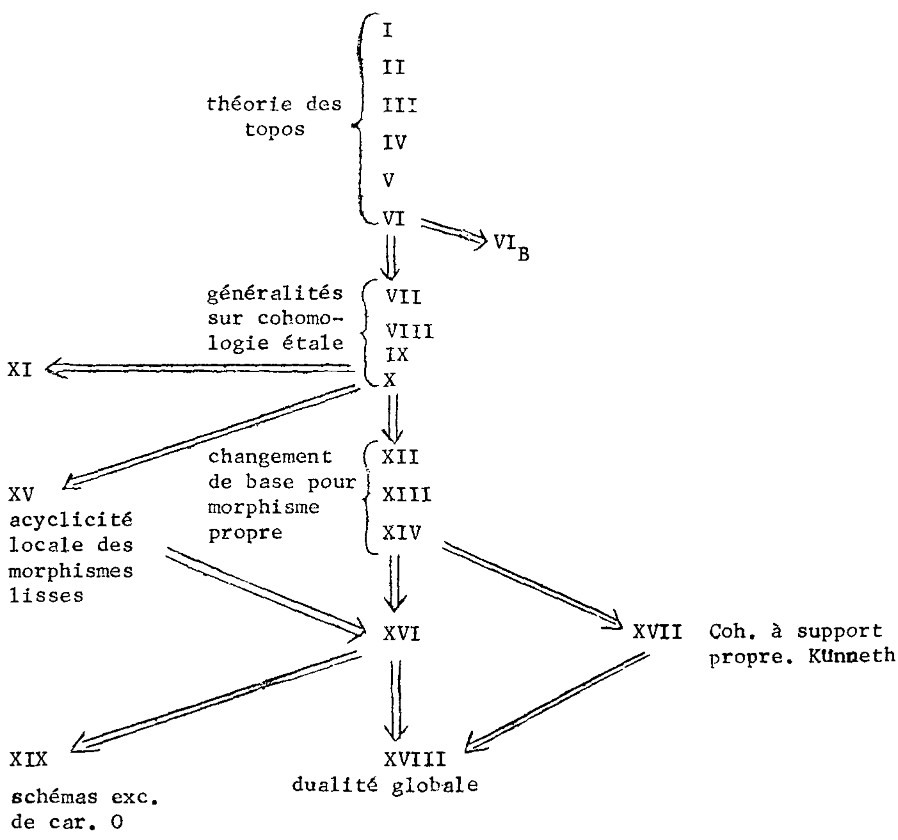
c) Une "formule de Künneth symétrique" XVII 5.5, 2.1, donnant la cohomologie d'une puissance symétrique en cohomologie étale ou cohérente à l'aide des foncteurs dérivés du foncteur TS (produit tensoriel symétrique), inspirée de la formule bien connue en topologie (due à DOLD). Contrairement à ce qu'on pourrait supposer, la formule en cohomologie étale ne résulte <u>pas</u> de "general non-sense", et procède par réductions successives au cas de coefficients constants sur une courbe propre et lisse sur un corps algébriquement clos, auquel cas un argument de spécialisation et le principe de Lefschetz permettent de se ramener au cas transcendant, où la formule résulte de la triangulabilité de l'espace envisagé. La formule de Künneth symétrique a été établie par P. DELIGNE en vue de diverses applications à des formules de fonctions L dans des cas non couverts par les exposés primitifs de SGA 5 (et qui seront sans doute inclus dans la réédition de SGA 5), notamment pour le cas où l'anneau de base pour les coefficients n'est pas un corps (tel $\underline{F}_\ell$ ou $\underline{Q}_\ell$), où est le corps premier $\underline{F}_p$ (p = car. du corps de base de la variété).

d) Une théorie des "puissances symétriques de torseurs" XVII 6.3, développée en vue de définir la trace d'un torseur par un morphisme fini localement fibre f: X $\longrightarrow$ Y, sous des conditions plus générales que les conditions habituelles (Groupe G sur Y lisse, ou f étale).

e) Une théorie "d'intégration des torseurs" XVIII 1.3 , et une formule "des coefficients universels", qui sont présentés comme des éléments d'une théorie de dualité pour des coefficients continus, relative à un morphisme f: X $\longrightarrow$ S lisse et de dimension relative 1 . Signalons que les notions introduites par P. DELIGNE suggèrent divers raffinements de formules du type Riemann-Roch en comologie étale, obtenus en écrivant des isomorphismes canoniques dans des catégories "d'objets stables" convenables formées avec des faisceaux étales constructibles, et des généralisations possibles en dimensions supérieures, et ouvrent ainsi un intéressant champ de recherches. Signalons aussi qu'à titre d'outil technique, P. DELIGNE démontre un intéressant théorème de structure pour certains torseurs sur certains schémas relatifs lisses f: X ⟶ S, comprenant notamment les fibrés projectifs (XVIII 1.2.2), théorème qui soulève également des questions intéressantes, liées notamment à la théorie des déformations des torseurs sous un schéma en groupes plat.

Bures, Novembre 1969

LEITFADEN



AVANT-PROPOS

1. Le but principal du présent Séminaire est de développer le formalisme de la "cohomologie de WEIL" des schémas. A partir essentiellement des résultats qui sont démontrés ici, des arguments bien connus, d'ailleurs dûs à WEIL lui-même, permettent de déduire une partie des conjectures de WEIL sur les fonctions L des variétés projectives non singulières sur un corps fini (*) (**). Cette déduction sera d'ailleurs présentée dans un séminaire qui fera suite à celui-ci (SGA 5 XIII).

Dans le présent séminaire, nous nous bornons à l'étude de la cohomologie des schémas, relativement à la topologie étale. Cette topologie, par sa description, est fort proche des topologies des variétés topologiques habituelles, et on verra que la plupart des résultats classiques concernant la cohomologie des espaces topologiques ordinaires (suites spectrales variées, théorèmes de finitude, Künneth, dualité, théorèmes de Lefschetz) peuvent se formuler et se démontrer dans le nouveau contexte, à condition de se borner le cas échéant aux faisceaux de torsion premiers aux caractéristiques résiduelles des

---

(*) Au moment d'écrire ces lignes, il n'est pas prouvé que les valeurs propres de l'homomorphisme de Frobenius opérant sur les $H^i(X,\mathbb{Z}_\ell)$ sont des entiers algébriques, ni a fortiori que leurs valeurs absolues sont égales à $q^{i/2}$.

(**) (Rajouté Octobre 1968). Pour un exposé faisant le point de l'état actuel des conjectures de WEIL, cf. l'exposé de KLEIMAN, Algebraic cycles and the Weil conjectures, in J. GIRAUD et Al., Dix exposés sur la cohomologie des schémas, North Holland Pub. Cie.

[Ajouté en Août 1969]. Le fait que les valeurs propres soient des entiers algébriques a été prouvé récemment par P. DELIGNE (Cf. SGA 7 XXI 5).

schémas envisagés. On obtiendra une théorie cohomologique "à coefficient de caractéristique 0" (comme demandée par WEIL) par un passage à la limites projective essentiellement trivial (cf. SGA 5 VI), permettant de définir une cohomologie à coefficient dans l'anneau $\mathbb{Z}_{\ell}$ des entiers ℓ-adiques à partir des coefficients $\mathbb{Z}/\ell^{\nu}\mathbb{Z}$, $\nu \longrightarrow +\infty$. Lorsque ℓ est premier aux caractéristiques résiduelles, cette cohomologie possède toutes les bonnes propriétés habituelles dans la cohomologie à coefficients $\mathbb{Z}$ classique (et se prête donc à la formulation des conjectures de WEIL). D'ailleurs, lorsque les schémas envisagés sont de type fini sur le corps des complexes $\underline{C}$, nous verrons que la cohomologie (à coefficients de torsion) est essentiellement identique à la cohomologie classique des espaces analytiques correspondants. Cela permettrait d'une part d'appliquer les résultats obtenus par voie purement algébrique à la cohomologie habituelle des variétés algébriques définies sur $\underline{C}$, et de généraliser par cette voie divers résultats classiques, démontrés généralement par voie transcendante sous des conditions de non singularité, et parfois de simplifier certaines démonstrations (notamment en théorie de Lefschetz). D'autre part, cela permettrait d'appliquer le cas échéant les résultats transcendants à la cohomologie des variétés algébriques en caractéristique p qui "se relèvent" en caractéristique 0 .

En revanche, les phénomènes essentiellement nouveaux, originaux à la caractéristique $p > 0$, et concernant des coefficients de p-torsion (qui devraient jouer un rôle essentiel par exemple dans les théorie du corps de classe local ou global), échappent à peu près totalement au point de vue de la cohomologie étale, adopté dans ces notes. Leur étude demandera sans doute l'utilisation d'une topologie plus fine, probablement de "topologie fppf" dont l'étude n'a été abordée que dans un cas très particulier par SCHATZ [Cohomology of artinian group schemes over local fields, Annals of Math. Vol 79, n°3, May 1964, p.411-449] (*). Cela semble être à l'heure actuelle l'extension la plus urgente à apporter à la théorie cohomologique étale (**). Signalons également le problème d'étendre aux schémas l'étude des invariants d'homotopie tels les π_i (tant du point de vue de la topologie étale que de la topologie fppf) ; il est permis d'espérer que des théorèmes du type d'Hurewicz qui restent à formuler, joints à notre assez bonne connaissance de la cohomologie et du groupe fondamental, permettront d'obtenir des résultats dans cette voie (***).

2. En plus de l'influence, évidente, des idées de WEIL, signalons aussi les liens de ce séminaire avec diverses recherches antérieures qui ont influencé l'un ou l'autre de nous :

a) La théorie de J. TATE de la dimension cohomologique des corps [CG], d'ailleurs motivée par le point de vue de la cohomologie

---

(*) Cf. aussi A. GROTHENDIECK, le groupe de Brauer III § 11, in Dix exposés sur la cohomologie des schémas (North Holland Pub. Cie).

(**) Depuis la rédaction de ces lignes, il est apparu que la topologie fppf ne satisfait pas à toutes les propriétés espérées, et "l'extension la plus urgente" serait plutôt dans le développement de la "cohomologie cristalline", initiée dans A. GROTHENDIECK, Crystals and the De Rham cohomology of schemes, inspirée par les travaux de MONSKY-WASHNITZER et de MANIN.

(***) Cf. note (*) de la page suivante.

étale, a été à son tour un outil et un modèle pour la théorie de la dimension cohomologique des schémas.

b) Les travaux de IGUSA sur les "vanishing cycles" (dont il ne sera question que dans un séminaire ultérieur (**), et la démonstration par Igusa de l'inégalité de Picard $\rho \leq b_2$, en toute caractéristique, que nous obtenons ici de façon assez formelle (en même temps que le théorème de finitude de Néron-Sévéri), une fois en possession d'une théorie cohomologique explicite (***).

c) Les résultats de OGG et CHAFAREVITCH sur la cohomologie des corps de fonction d'une variable à coefficient dans des variétés abéliennes. Ces auteurs obtiennent en particulier un équivalent du théorème de dualité pour les courbes algébriques, en même temps qu'une formule de caractéristique d'Euler-Poincaré. (Pour un exposé en termes de cohomologie étale, cf. M. RAYNAUD, Sém. Bourbaki, décembre 1964 (****).

(*) Le problème de l'étude du "type d'homotopie étale" signalé plus haut a été résolu en principe, depuis la rédaction de cette introduction, par les travaux récents de MM. Michael ARTIN et Barry MAZUR (voir leur séminaire 1966 à ce sujet, publié dans M. ARTIN et B. MAZUR, Etale homotopy, Lecture Notes n°100, Springer (1969)).

(**) Cf. SGA 7 III, IX ...

(***) Cf. SGA 6 XIII 5.2, 5.3.

(****) Reproduit dans la collection citée en note à la page (ix).

3. Les exposés I à VI reprennent la théorie des faisceaux du point de vue des sites, ou mieux, des topos, en complétant le séminaire ARTIN 1962 (Harvard) sur de nombreux points. La présentation, et les résultats non contenus dans ARTIN, sont dûs pour l'essentiel à J. GIRAUD et J.L. VERDIER.

Les exposés VII et VIII développent les premières définitions et propriétés relatives à la topologie étale et la cohomologie étale.

Les exposés IX, X donnent les premiers résultats quantitatifs élémentaires relatifs aux coefficients de torsion, concernant en particulier la cohomologie des courbes algébriques, la dimension cohomologique, la notion de faisceau constructible.

Les résultats des exposés XII à XVI ([2]) sont centrés autour des deux "théorèmes de changement de base", qui techniquement constituent le résultat central de ce séminaire. La clef pour l'un et l'autre de ces théorèmes se trouve dans certaines propriétés du groupe fondamental, qui dans notre contexte s'énoncent le plus naturellement en termes de 1-cohomologie à coefficients dans des faisceaux de groupes non nécessairement commutatifs. Aussi, dans l'énoncé des résultats cohomologiques principaux, avons-nous systématiquement pris en considération également la cohomologie non commutative, ce qui permettrait de retrouver, sous une forme parfois plus générale et plus commode du point de vue technique, les principaux résultats sur le groupe fondamental de SGA 1961 (*).

([2]) obtenus entre Septembre 1962 et Mars 1963 par M. ARTIN et A. GROTHENDIECK

(*) Cf. l'exposé de Mme M. RAYNAUD, dans SGA 1 XIII.

Les exposés XVII et XVIII ([3]) présentent la théorie de la cohomologie "à supports compacts" et le théorème de dualité globale, qui impliquent la dualité de Poincaré pour les vairétés algébriques non singulières.

Enfin l'exposé XIX présente certains résultats locaux ([4]) centrés sur le "théorème de pureté cohomologique", dont la plupart utilisent la résolution des singularités, et jusqu'à nouvel ordre ne sont donc applicables qu'en caractéristique nulle.

4. Nous utiliserons couramment les résultats de EGA I à IV, et de SGA 1 et SGA 2.

([3]) obtenus en Février-Mars 1963 par A. GROTHENDIECK, en même temps que le "théorème de dualité locale" qui sera exposé dans SGA 5 .

([4]) obtenu par ARTIN en 1964.

SOMMAIRE

EXPOSE I : "PREFAISCEAUX, par A. Grothendieck et J.L. Verdier

EXPOSE II : "TOPOLOGIES ET FAISCEAUX", par J.L. Verdier

EXPOSE III : "FONCTORIALITE DES CATEGORIES DE FAISCEAUX", par J.L. Verdier

EXPOSE IV : "TOPOS", par A. Grothendieck et J.L. Verdier