

Almerico Murli

# Matematica numerica: metodi, algoritmi e software

Parte seconda

*S.U.N. - Biblioteca del Dipartimento di Matematica e Fisica  
Viale Lincoln, 5 - 81100 Caserta*

E' fatto assoluto divieto di sottolineare e/o danneggiare i libri di proprietà della Biblioteca.

L'inosservanza di tale norma può comportare provvedimenti nei confronti dell'utente che dovrà provvedere al reintegro del testo danneggiato, acquistando una nuova copia o una copia di eguale valore indicata dal Responsabile della Biblioteca.

Liguori Editore

# Indice

Prefazione	1
<b>1 Risoluzione numerica di equazioni non lineari</b>	<b>3</b>
1.1 Introduzione . . . . .	3
1.2 Il Metodo di Tabulazione . . . . .	6
1.2.1 Applicabilità . . . . .	14
1.2.2 Convergenza . . . . .	14
1.3 Il Metodo di Bisezione . . . . .	21
1.3.1 Applicabilità . . . . .	27
1.3.2 Convergenza . . . . .	29
1.4 Il Metodo di Newton . . . . .	30
1.4.1 Applicabilità . . . . .	35
1.4.2 Convergenza . . . . .	36
1.5 Il Metodo delle Secanti . . . . .	44
1.5.1 Applicabilità . . . . .	46
1.5.2 Convergenza . . . . .	47
1.6 I metodi ibridi. Il Metodo di Dekker-Brent . . . . .	54
1.7 Metodi <i>one point</i> . Il Metodo del punto fisso . . . . .	59
1.7.1 Convergenza . . . . .	60
1.8 Un cenno al Metodo di Newton per sistemi non lineari . . . . .	62
1.9 Condizionamento delle equazioni non lineari . . . . .	66
1.10 Criteri di arresto . . . . .	70
1.11 Software matematico disponibile . . . . .	84
1.12 MATLAB e le equazioni non lineari . . . . .	87
1.13 Esercizi . . . . .	91
1.14 Problemi da risolvere con il calcolatore . . . . .	94
Bibliografia . . . . .	100
<b>2 La quadratura</b>	<b>101</b>
2.1 Principali formule di quadratura . . . . .	101

2.1.1	Costruzione delle formule di quadratura . . . . .	101
2.1.2	Formule esatte per uno spazio di funzioni . . . . .	103
2.1.3	Formule di Newton-Cotes . . . . .	107
2.1.4	Formule di Gauss . . . . .	110
2.1.5	Formule di Gauss con nodi preassegnati . . . . .	117
2.2	Errori e criteri di convergenza per le formule di quadratura .	122
2.2.1	Errore di discretizzazione . . . . .	122
2.2.2	Errore delle formule composite e stima calcolabile dell'errore . . . . .	127
2.2.3	Criteri di convergenza delle formule di quadratura .	132
2.3	Condizionamento di una formula di quadratura . . . . .	139
2.4	Alcuni risultati sull'indice di condizionamento assoluto . . .	142
2.4.1	Formule di Gauss e Gauss-Kronrod . . . . .	143
2.4.2	Formule di Newton-Cotes . . . . .	144
2.4.3	Formule di quadratura composite basate sulle formu- le interpolatorie . . . . .	147
2.5	Errore di round-off nella valutazione di una formula di qua- dratura . . . . .	150
2.6	Proprietà notevoli della formula trapezoidale composta . .	152
2.7	La quadratura multidimensionale . . . . .	159
2.7.1	Formule prodotto . . . . .	160
2.7.2	Formule monomiali . . . . .	162
2.7.3	Metodi Monte Carlo . . . . .	163
2.7.4	Le Lattice Rule . . . . .	165
2.8	Le formule di quadratura ottimali . . . . .	167
2.9	Le formule Filon-like . . . . .	172
2.10	Software matematico disponibile . . . . .	180
2.10.1	Esempio d'uso . . . . .	183
2.11	MATLAB e la quadratura . . . . .	186
2.12	Esercizi . . . . .	191
2.13	Problemi da risolvere con il calcolatore . . . . .	198
	Bibliografia . . . . .	205
<b>3</b>	<b>Risoluzione numerica di ODE: problemi a valori iniziali. Una introduzione</b> . . . . .	<b>207</b>
3.1	Alcuni esempi di problemi a valori iniziali . . . . .	207
3.2	Un metodo esplicito: il metodo di Eulero . . . . .	213
3.3	Analisi degli errori introdotti dal metodo di Eulero . . . . .	217

3.3.1	Il problema discreto come approssimazione del problema continuo . . . . .	219
3.3.2	La risoluzione del problema discreto . . . . .	227
3.4	Un metodo implicito: il metodo di Eulero all'indietro . . . . .	239
3.5	Analisi degli errori introdotti dal metodo di Eulero all'indietro	242
3.5.1	Il problema discreto come approssimazione del problema continuo . . . . .	243
3.5.2	La risoluzione del problema discreto . . . . .	246
3.6	Software matematico disponibile per ODE . . . . .	252
3.7	MATLAB e le ODE . . . . .	253
3.8	Esercizi . . . . .	257
3.9	Problemi da risolvere con il calcolatore . . . . .	260
	Bibliografia . . . . .	264
<b>4</b>	<b>Calcolo matriciale: metodi iterativi</b>	<b>265</b>
4.1	Introduzione . . . . .	265
4.2	I metodi di Jacobi e Gauss-Seidel . . . . .	269
4.2.1	Primi esempi di algoritmi . . . . .	276
4.2.2	Complessità computazionale . . . . .	279
4.2.3	Interpretazione geometrica . . . . .	280
4.3	Convergenza . . . . .	281
4.4	Un semplice criterio di arresto . . . . .	292
4.5	Un esempio di software matematico per i metodi iterativi . .	302
4.6	Efficienza . . . . .	305
4.6.1	Un algoritmo per la memorizzazione dei coefficienti di una matrice ad elevato grado di sparsità . . . . .	307
4.7	Metodi iterativi stazionari . . . . .	312
4.8	Metodi basati sulla decomposizione della matrice (splitting)	314
4.9	Studio della convergenza . . . . .	317
4.10	Velocità di convergenza . . . . .	325
4.11	Accelerazione della convergenza . . . . .	327
4.11.1	Metodi di rilassamento: il metodo SOR . . . . .	328
4.11.2	Accelerazione polinomiale . . . . .	336
4.11.3	Accelerazione polinomiale di Chebyshev . . . . .	338
4.12	Criteri di arresto . . . . .	341
4.13	Un cenno ai metodi iterativi non stazionari basati sui sottospazi di Krylov . . . . .	345
4.14	Software matematico disponibile . . . . .	347
4.14.1	La libreria SPARSKIT . . . . .	352

4.15	MATLAB e i sistemi lineari <i>sparsi</i> . . . . .	364
4.15.1	Un esempio di programma MATLAB per i metodi iterativi . . . . .	364
4.15.2	Funzioni MATLAB per matrici <i>sparse</i> . . . . .	367
4.16	Esercizi . . . . .	374
4.17	Problemi da risolvere con il calcolatore . . . . .	385
	Bibliografia . . . . .	391
<b>5</b>	<b>Una introduzione al calcolo numerico di autovalori</b>	<b>393</b>
5.1	Autovalori e autovettori . . . . .	393
5.2	Preliminari . . . . .	393
5.2.1	Polinomio caratteristico . . . . .	394
5.2.2	Molteplicità di un autovalore. Matrici diagonalizzabili	395
5.3	Condizionamento del problema agli autovalori . . . . .	398
5.3.1	Indice di condizionamento . . . . .	399
5.4	Classificazione dei problemi . . . . .	403
5.5	Limiti del polinomio caratteristico . . . . .	404
5.6	Metodo delle Potenze . . . . .	405
5.6.1	Normalizzazione e interpretazione geometrica . . . . .	411
5.6.2	Primo esempio di algoritmo . . . . .	418
5.6.3	Complessità computazionale . . . . .	418
5.6.4	Un criterio di arresto . . . . .	421
5.7	Metodo delle Potenze Inverse . . . . .	427
5.7.1	Aspetti implementativi . . . . .	429
5.7.2	Primo esempio di algoritmo . . . . .	432
5.8	Software matematico disponibile . . . . .	432
5.9	MATLAB e gli autovalori . . . . .	434
	Bibliografia . . . . .	439
<b>6</b>	<b>La Trasformata discreta di Fourier e l'algoritmo FFT</b>	<b>441</b>
6.1	Introduzione . . . . .	441
6.2	La Trasformata discreta di Fourier (DFT) . . . . .	447
6.2.1	Alcune proprietà della DFT . . . . .	449
6.3	La DFT come approssimazione della Trasformata di Fourier (FT) . . . . .	464
6.4	La Trasformata Veloce di Fourier (FFT) . . . . .	467
6.4.1	L'algoritmo di Cooley e Tukey . . . . .	468
6.4.2	L'algoritmo di Gentleman e Sande . . . . .	476
6.4.3	Complessità computazionale degli algoritmi FFT . . . . .	482

6.4.4	Aspetti implementativi dell'algoritmo FFT radix-2 . . . . .	485
6.4.5	Formulazione matriciale dell'algoritmo FFT radix-2 . . . . .	497
6.4.6	Stabilità dell'algoritmo FFT radix-2 . . . . .	502
6.5	Software matematico disponibile . . . . .	504
6.6	MATLAB e la Trasformata discreta di Fourier . . . . .	506
6.7	Esercizi . . . . .	509
6.8	Problemi da risolvere con il calcolatore . . . . .	511
	Bibliografia . . . . .	518
<b>7</b>	<b>Sul condizionamento dell'interpolazione polinomiale di Lagrange</b>	<b>519</b>
	<b>7.1</b> Introduzione . . . . .	<b>519</b>
	7.1.1 Condizionamento, stabilità ed efficienza per il problema di interpolazione di Lagrange . . . . .	519
	7.1.2 Formula di Lagrange . . . . .	521
	7.1.3 Formula di Newton . . . . .	528
	<b>7.2</b> L'algoritmo di Björck e Pereyra per sistemi lineari con matrice di Vandermonde . . . . .	<b>539</b>
	Bibliografia . . . . .	551
<b>8</b>	<b>Generazione numerica di funzioni elementari</b>	<b>553</b>
	<b>8.1</b> Introduzione . . . . .	<b>553</b>
	<b>8.2</b> La migliore approssimazione uniforme delle funzioni elementari . . . . .	<b>555</b>
	8.2.1 L'algoritmo di Remez . . . . .	559
	8.2.2 Studio della convergenza . . . . .	564
	8.2.3 Esempio di studio: l'approssimazione minimax della funzione esponenziale . . . . .	566
	8.2.4 L'approssimazione minimax razionale . . . . .	569
	Bibliografia . . . . .	578
<b>9</b>	<b>Sulla convergenza dei polinomi interpolanti</b>	<b>579</b>
	<b>9.1</b> Introduzione . . . . .	<b>579</b>
	<b>9.2</b> Preliminari . . . . .	<b>586</b>
	<b>9.3</b> La convergenza dei polinomi interpolanti . . . . .	<b>589</b>
	Bibliografia . . . . .	607
	<b>Appendice A: Il calcolo numerico di <math>\pi</math></b>	<b>609</b>
	A.1 Metodo I - Archimede 240 a.C. . . . .	611

A.1.1	Analisi della stabilità dell'algoritmo . . . . .	614
A.1.2	Analisi dell'errore di troncamento analitico . . . . .	615
A.2	<i>Metodo II - Viete 1593</i> . . . . .	615
A.2.1	Analisi della stabilità dell'algoritmo . . . . .	618
A.2.2	Analisi dell'errore di troncamento analitico . . . . .	618
A.3	<i>Metodo III - Leibniz 1688</i> . . . . .	618
A.3.1	Analisi della stabilità dell'algoritmo . . . . .	619
A.3.2	Analisi dell'errore di troncamento analitico . . . . .	619
A.4	<i>Metodo IV - Integrazione Numerica</i> . . . . .	619
A.4.1	Analisi della stabilità dell'algoritmo . . . . .	620
A.4.2	Analisi dell'errore di troncamento analitico . . . . .	620
A.5	Algoritmi implementati in FORTRAN . . . . .	621
	Bibliografia . . . . .	629
 <b>Appendice B: Approfondimenti sulla generazione delle funzioni elementari</b>		<b>631</b>
B.1	Alcuni richiami . . . . .	631
B.2	Esempio di studio: generazione della funzione esponenziale	633
B.2.1	Analisi degli errori . . . . .	636
	Bibliografia . . . . .	647
 <b>Appendice C: I polinomi ortogonali</b>		<b>649</b>
C.1	Generalità . . . . .	649
C.2	I polinomi di Chebyshev . . . . .	656
C.3	I polinomi di Stieltjes . . . . .	658
	Bibliografia . . . . .	661
 <b>Appendice D: La Decomposizione SVD (<i>Singular Value Decomposition</i>)</b>		<b>663</b>
D.1	. . . . .	663
	Bibliografia . . . . .	667
 <b>Testi generali di riferimento</b>		<b>669</b>
	Bibliografia . . . . .	669