

THÉORIE

ANALYTIQUE

DES PROBABILITÉS.

TABLE DES MATIÈRES.

INTRODUCTION.

<i>De la Probabilité.....</i>	page	ij
<i>Principes généraux du Calcul des Probabilités.....</i>		vij
<i>De l'espérance.....</i>		xiiij
<i>Méthodes analytiques du Calcul des Probabilités.....</i>		xvij
<i>APPLICATION DU CALCUL DES PROBABILITÉS.....</i>		xxxiiij
<i>Des Jeux.....</i>		xxxiiij
<i>Des inégalités inconnues qui peuvent exister entre les chances que l'on suppose égales.....</i>		xxxiv
<i>De la probabilité des témoignages.....</i>		xxxvj
<i>Des choix et des décisions des Assemblées.....</i>		xlviij
<i>Des Lois de la Probabilité, qui résultent de la multiplication indéfinie des événemens.....</i>		lij
<i>Du Calcul des Probabilités, appliqué à la recherche des phénomènes et de leurs causes.....</i>		lx
<i>Des milieux qu'il faut choisir entre les résultats d'un grand nombre d'observations.....</i>		lxxj
<i>Des Tables de mortalité, et des durées moyennes de la vie, des mariages et des associations quelconques...</i>		lxxv
<i>Des bénéfices et des établissemens qui dépendent de la probabilité des événemens.....</i>		lxxxj
<i>Des illusions dans l'estimation des probabilités.....</i>		lxxxvj
<i>Des divers moyens d'approcher de la certitude.....</i>		xciiij
<i>Notice historique sur le Calcul des Probabilités.....</i>		xcxix
<i>Plan de l'Ouvrage.....</i>		cvj

LIVRE PREMIER.

DU CALCUL DES FONCTIONS GÉNÉRATRICES.

PREMIÈRE PARTIE.

Considérations générales sur les élémens des grandeurs. page 3

La notation des exposans, imaginée par Descartes, a conduit Wallis et Newton; à la considération des exposans fractionnaires, positifs et négatifs, et à l'interpolation des séries. Leibnitz a rendu ces exposans variables; ce qui a donné naissance au calcul exponentiel, et a complété le système des élémens des fonctions finies. Ces fonctions sont formées de quantités exponentielles, algébriques et logarithmiques; quantités essentiellement distinctes les unes des autres. Les intégrales ne sont pas souvent réductibles à des fonctions finies. Leibnitz ayant adapté à sa caractéristique différentielle, des exposans, pour exprimer des différentiations répétées; il a été conduit à l'analogie des puissances et des différences, analogie que Lagrange a suivie par voie d'induction, dans tous ses développemens. La théorie des fonctions génératrices, étend cette analogie à des caractéristiques quelconques, et la montre avec évidence. Toute la théorie des suites, et l'intégration des équations aux différences, découle avec une extrême facilité, de cette théorie..... page 3

CHAP. I. Des fonctions génératrices à une variable..... page 9

u étant une fonction quelconque d'une variable t , et y_s étant le coefficient de t^s dans le développement de cette fonction; u est fonction génératrice de y_s .

Si l'on multiplie u , par une fonction quelconque s de $\frac{1}{t}$, on aura une nouvelle fonction génératrice qui sera celle d'une fonction de y_s, y_{s+1} , etc. En désignant par $\nabla \cdot y_s$ cette dernière fonction; $u \cdot s$ sera la fonction génératrice de $\nabla^1 \cdot y_s$, ensorte que l'exposant de s , dans la fonction génératrice, devient celui de la caractéristique ∇ , dans la fonction engendrée..... n° 2, page 9

De l'interpolation des suites à une variable, et de l'intégration des équations différentielles linéaires..... page 13

L'interpolation se réduit à déterminer le coefficient y_{s+1} de t^s dans le développement de $\frac{u}{t}$. On peut donner à $\frac{1}{t}$, une infinité de formes différentes: en l'éle-

TABLE DES MATIÈRES.

487

vant à la puissance i sous ces formes, et repassant ensuite des fonctions génératrices aux coefficients, on a sous une infinité de formes correspondantes, l'expression de y_{s+i} . Application de cette méthode aux suites dont les différences successives des termes vont en décroissant..... n° 3, page 13

Formules pour interpoler entre un nombre impair ou pair de quantités équidistantes..... n° 4, page 15

Formule générale d'interpolation des séries dont la dernière raison des termes est celle d'une suite dont le terme général est donné par une équation linéaire aux différences, à coefficients constans..... n° 5, page 19

La formule s'arrête, lorsque la raison des termes est celle d'une suite semblable, et alors elle donne l'intégrale des équations linéaires aux différences finies, dont les coefficients sont constans. Intégration générale de ces équations, dans le cas même où elles ont un dernier terme fonction de l'indice..... n° 6, page 26

Formule d'interpolation des mêmes suites, ordonnée par rapport aux différences successives de la variable principale..... n° 7, page 31

Passage de cette formule, du fini à l'infiniment petit. Interpolation des suites dont la dernière raison des termes est celle d'une équation aux différences infiniment petites linéaires, à coefficients constans. Intégration de ce genre d'équations, lorsqu'elles ont un dernier terme..... n° 8, page 34

De la transformation des suites..... n° 9, page 36

Théorèmes sur le développement des fonctions et de leurs différences, en séries..... page 39

On déduit du calcul des fonctions génératrices, les formules

$$'\Delta^n \cdot y_s = [(1 + \Delta \cdot y_s)' - 1]^n, \quad '\Sigma^n \cdot y_s = [(1 + \Delta \cdot y_s)' - 1]^{-n},$$

Δ et Σ se rapportant au cas où x varie de l'unité, et $'\Delta$ et $'\Sigma$ se rapportant au cas où x varie de i . On tire de ces formules, les suivantes,

$$'\Delta^n \cdot y_s = \left(c^{\frac{a}{c} \frac{dy_s}{dx}} - 1 \right)^n, \quad '\Sigma^n \cdot y_s = \left(c^{\frac{a}{c} \frac{dy_s}{dx}} - 1 \right)^{-n},$$

dans lesquelles c désigne le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité, et $'\Delta$ et $'\Sigma$ se rapportent à la variation a , de x . On transforme l'expression de $'\Delta^n \cdot y_s$ dans celle-ci,

$$\left(c^{\frac{a}{2} dy_x + \frac{na}{2}} - c^{-\frac{a}{2} dy_x + \frac{na}{2}} \right)^n.$$

On parvient à ces formules,

$$\frac{d^n \cdot y_s}{dx^n} = [\log (1 + \Delta \cdot y_s)]^n,$$

$$f^n \cdot y_s \cdot dx^n = [\log (1 + \Delta \cdot y_s)]^{-n}.$$

TABLE DES MATIÈRES.

Analogie entre les puissances positives et les différences, et entre les puissances négatives et les intégrales, fondée sur ce que les exposans des puissances, dans les fonctions génératrices, se transportent aux caractéristiques correspondantes de la variable y_x . Généralisation des résultats précédens... n° 10, page 39
 Théorèmes analogues aux précédens, sur les produits de plusieurs fonctions d'une même variable, et spécialement sur le produit $p^x y_x$ n° 11, page 45

CHAP. II. Des fonctions génératrices à deux variables.... page 50

u étant une fonction de deux variables t et t' , et $y_{x,x'}$ étant le coefficient de $t^x t'^{x'}$ dans le développement de cette fonction; u est fonction génératrice de $y_{x,x'}$.

Si l'on multiplie u par une fonction s de $\frac{1}{t}$ et $\frac{1}{t'}$, le coefficient de $t^x t'^{x'}$ dans le développement de ce produit, sera une fonction de $y_{x,x'}, y_{x+1,x'}, y_{x,x'+1}$ etc.; en la désignant par $\nabla \cdot y_{x,x'}$, us' sera la fonction génératrice de $\nabla \cdot y_{x,x'}$, n° 12, page 50

De l'interpolation des suites à deux variables, et de l'intégration des équations linéaires aux différences partielles..... page 52

Formule générale de l'interpolation des suites dont la dernière raison des termes est celle d'une série dont le terme général est donné par une équation linéaire aux différences partielles, à coefficients constans..... n° 13, page 52

La formule s'arrête, lorsque la raison des termes est celle d'une série semblable, et alors elle donne l'intégrale des équations linéaires aux différences finies partielles, dont les coefficients sont constans. Cette intégrale suppose que l'on connaît, ou que l'on peut déduire des conditions du problème, n valeurs arbitraires de $y_{x,x'}$, en donnant, par exemple à x , les n valeurs $0, 1, 2, \dots, n-1$, x' étant d'ailleurs quelconque. Expression très-simple de $y_{x,x'}$, lorsque ces fonctions arbitraires en x' sont données par des équations linéaires aux différences, à coefficients constans..... n° 14, page 56

Expression générale de $y_{x,x'}$ sous la forme d'intégrale définie; remarque importante sur le nombre des fonctions arbitraires que renferme l'intégrale des équations à différences partielles..... n° 15, page 58

Examen de quelques cas qui échappent à la formule générale d'intégration, donnée dans ce qui précède; dans ce cas, les caractéristiques des différences finies, que renferment les intégrales, ont pour exposans, les indices variables des équations aux différences partielles..... n° 16, page 62

Intégration de l'équation

$$0 = \Delta^n \cdot y_{x,x'} + \frac{a}{\Delta} \cdot \Delta^{n-1} \cdot \Delta \cdot y_{x,x'} + \frac{b}{\Delta^2} \cdot \Delta^{n-2} \cdot \Delta^2 \cdot y_{x,x'} + \text{etc.},$$

Δ se rapportant à la variabilité de x dont l'unité est la différence, et Δ' à

TABLE DES MATIÈRES.

489

rapportant à la variabilité de x' dont a est la différence. On en déduit l'intégrale de l'équation aux différences partielles infiniment petites et finies, que l'on obtient en changeant dans la précédente, a en dx' ; et la caractéristique Δ en d n° 17, page 65

Théorèmes sur le développement en séries, des fonctions de plusieurs variables..... page 67

Ces théorèmes sont analogues à ceux qui ont été donnés précédemment, sur les fonctions à une seule variable, et l'on y retrouve l'analogie observée entre les puissances positives et les différences, et entre les puissances négatives et les intégrales..... n° 18, page 67

Considérations sur les passages du fini à l'infiniment petit..... page 70

La considération de ces passages est très-propre à éclaircir les points les plus délicats du calcul infinitésimal. Elle montre avec évidence, que les quantités négligées dans ce calcul, n'ôtent rien à sa rigueur. En l'appliquant au problème des cordes vibrantes, elle prouve la possibilité d'introduire des fonctions arbitraires discontinues dans les intégrales des équations aux différences partielles finies et infiniment petites, et elle donne les conditions de cette discontinuité..... n° 19, page 70

Considérations générales sur les fonctions génératrices..... page 80

Trouver la fonction génératrice d'une quantité donnée par une équation linéaire aux différences finies, dont les coefficients sont les fonctions rationnelles et entières de l'indice..... n° 20, page 80

Expressions des intégrales de ces équations, en intégrales définies. Les fonctions sous le signe intégral f , sont de la même nature que les fonctions génératrices des quantités données par ces équations. Ainsi tous les théorèmes déduits précédemment de l'analogie des puissances et des différences, s'appliquent à ces intégrales. Leur principal avantage est de fournir une approximation aussi commode que convergente, de ces quantités, lorsque leur indice est un très-grand nombre. Cette méthode d'approximation acquiert une grande extension par les passages du positif au négatif, et du réel à l'imaginaire, passages dont j'ai donné les premières traces dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de 1782. Il paraît par les ouvrages posthumes d'Euler, que vers le même tems, ce grand géomètre s'occupait du même objet..... n° 21, page 83

SECONDE PARTIE.

Théorie des approximations des formules qui sont fonctions de grands nombres..... page 88

CHAP. I. De l'intégration par approximation des différentielles qui renferment des facteurs élevés à de grandes puissances. page 88

Expression en série convergente, de leur intégrale prise entre deux limites données : la série cesse d'être convergente près du *maximum* de la fonction sous le signe intégral..... n° 22, page 88

Expression en série convergente, de l'intégrale dans ce dernier cas, n° 23, page 91
Ce que devient cette série, lorsque l'intégrale est prise entre deux limites qui rendent nulle la fonction sous le signe intégral. Sa valeur dépend alors d'intégrales de la forme $\int t^r dt \cdot c^{-t}$, et prises depuis t nul jusqu'à t infini. On établit ce théorème,

$$n^r \int t^{r-1} dt \cdot c^{-t} \cdot \int t^{n-r-1} dt \cdot c^{-t} = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{r-1}{n}\right)},$$

π étant la demi-circconférence dont le rayon est l'unité. On en déduit ce résultat remarquable,

$$\int dt \cdot c^{-t} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} \dots \dots \dots \text{n° 24, page 91}$$

Ce dernier résultat donne par le passage du réel à l'imaginaire,

$$\int dx \cdot \cos rx \cdot c^{-a^2 x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \cdot c^{-\frac{r^2}{4a^2}},$$

l'intégrale étant prise depuis x nul jusqu'à x infini. Méthode directe qui conduit à cette équation, et de laquelle on tire la valeur de l'intégrale, lorsque la quantité sous le signe f est multipliée par x^{2n} : valeur de l'intégrale $\int x^{2n-1} dx \cdot \sin rx \cdot c^{-a^2 x^2}$ n° 25, page 96

On parvient aux formules

$$\int \frac{dx \cdot \cos rx}{1+x^2} = \int \frac{x dx \cdot \sin rx}{1+x^2} = \pi \cdot c^{-r},$$

les intégrales étant prises depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x = +\infty$; et l'on en déduit

les intégrales $\int \frac{M}{N} \cdot dx \cdot \frac{\cos}{\sin} rx$, prises dans les mêmes limites, N étant une fonction rationnelle et entière de x , d'un degré supérieur à M , et n'ayant pas de facteur réel du premier degré..... n° 26, page 98

TABLE DES MATIÈRES.

Expression de l'intégrale $\int dt. c^{-s}$ prise entre des limites données, soit en séries, soit en fraction continue..... n° 27, page 101
 Approximation des double, triple, etc. intégrales des différentielles multipliées par des facteurs élevés à de hautes puissances. Formules en séries convergentes, pour intégrer dans des limites données, la double intégrale $\iint y dx dx'$, y étant une fonction de x et de x' . Examen du cas où l'intégrale est prise très-près du *maximum* de y . Expression de l'intégrale en séries convergentes..... n° 28, page 104

CHAP. II. De l'intégration par approximation, des équations linéaires aux différences finies et infiniment petites..... page 110

Intégration de l'équation aux différences finies

$$S = A.y + B.\Delta.y + C.\Delta^2.y + \text{etc.},$$

A, B, C , etc. étant des fonctions rationnelles et entières de s . Si la variable y , est exprimée par l'intégrale définie $\int x^\phi dx$, ou par celle-ci $\int c^{-s} \phi dx$, ϕ étant fonction de x ; on a par les formules du chapitre précédent, la valeur de y , en séries très-convergentes, lorsque l'indice s est un grand nombre. Pour déterminer ϕ , on substitue pour y , son expression en intégrale définie, dans l'équation aux différences en y , qui se passe en deux autres, dont l'une est une équation différentielle en ϕ , qui sert à déterminer cette inconnue; l'autre équation donne les limites de l'intégrale définie..... n° 29, page 110

Intégration d'un nombre quelconque d'équations linéaires à un seul indice, et ayant un dernier terme; les coefficients de ces équations étant des fonctions rationnelles et entières de cet indice. Cette méthode peut être étendue aux équations linéaires à différences ou infiniment petites, ou en partie finies, et en partie infiniment petites..... n° 30, page 116

La principale difficulté de cette analyse, consiste à intégrer l'équation différentielle en ϕ , qui n'est intégrable généralement, que dans le cas où l'indice s n'est qu'à la première puissance dans l'équation aux différences en y , qui alors est de la forme $0 = V + s.T$, V et T étant des fonctions linéaires de y , et de ses différences soit finies, soit infiniment petites. Intégrale de cette dernière équation, par une série très-convergente, lorsque s est un grand nombre. Remarque importante sur l'étendue de cette série, qui est indépendante des limites de l'intégrale définie par laquelle y , est exprimé, et qui subsiste dans le cas même où l'équation aux limites n'a que des racines imaginaires. Lorsque dans l'équation en y , s surpasse le premier degré; on peut quelquefois la décomposer en plusieurs équations qui ne renferment que la première puissance de s . On peut encore dans plusieurs cas, intégrer par une approximation très-convergente, l'équation différentielle en ϕ n° 31, page 120

Intégration de l'équation

$$0 = V + s.T + s'.R,$$

V, T, R étant des fonctions quelconques linéaires de $y_{i,s}$, et de ses différences ordinaires et partielles, finies et infiniment petites..... n° 32, page 123

CHAP. III. Application des méthodes précédentes, à l'approximation de diverses fonctions de très-grands nombres..... page 126

De l'approximation des produits composés d'un grand nombre de facteurs, et des termes des polynomes élevés à de grandes puissances..... page 126

L'intégrale de l'équation $0 = (s+1) \cdot y_s - y_{s-1}$, approchée par les méthodes du chapitre précédent, et comparée à son intégrale finie, donne par une série très-convergente, le produit $(\mu+1) \cdot (\mu+2) \cdot \dots \cdot s$. En faisant s négatif, et passant du positif au négatif, et du réel à l'imaginaire; on parvient à cette équation remarquable

$$\frac{2\pi \cdot (-1)^{\frac{1}{2}-\mu}}{\int x^{\mu-1} dx \cdot c^{-s}} = \int \frac{dx \cdot c^{-s}}{x^{\mu}};$$

la première intégrale étant prise depuis x nul jusqu'à x infini, et la dernière intégrale étant prise entre les limites imaginaires de x , qui rendent nulle la

fonction $\frac{c^{-s}}{x^{\mu}}$; ce qui donne un moyen facile d'avoir l'intégrale $\int \frac{dx \cos x}{x^{\mu}}$:

prise depuis x nul jusqu'à x infini. Cette équation donne encore la valeur des intégrales $\int \frac{d\pi \cdot \cos \pi}{1+\pi^2}$, $\int \frac{\pi \cdot d\pi \cdot \sin \pi}{1+\pi^2}$, prise depuis π nul jusqu'à π infini. On

trouve $\frac{\pi}{2c}$ pour ces intégrales; leur accord avec les résultats du n° 26, prouve

la justesse de ces passages du positif au négatif, et du réel à l'imaginaire: ces divers résultats ont été donnés dans les Mémoires de l'Académie des Sciences, pour l'année 1782..... n° 33, page 126

Intégrale approchée de l'équation $0 = (a'+bs) \cdot y_{s+1} - (a+bs) \cdot y_s$, d'où l'on tire par une série simple et très-convergente, le terme moyen ou indépendant de a , du binome $(a + \frac{1}{a})^{2s}$ n° 34, page 135

Méthode générale pour avoir par une série convergente, le terme moyen ou indépendant de a , dans le développement du polynome $a^{-s} + a^{-s+1} + a^{-s+2} + \dots + a^{-1} + a^s$ élevé à une très-haute puissance..... n° 35, page 138

Expressions en série convergente, du coefficient de $a^{\pm l}$, dans le développement de cette puissance, et de la somme de ces coefficients, depuis celui de a^{-l} jusqu'à celui de a^l n° 36, page 146

Intégration par approximation, de l'équation aux différences $p^s \cdot y_s + (s-1) \cdot y_{s-1}$. On en déduit l'expression de la somme des termes de la puissance très-élevée

TABLE DES MATIÈRES.

493

d'un binôme, en arrêtant son développement à un terme quelconque fort éloigné du premier..... n° 37, page 149

De l'approximation des différences infiniment petites et finies très-élevées des fonctions..... page 151

Approximation des différences infiniment petites très-élevées des puissances d'un polynôme. Expression très-approchée de la différentielle très-élevée d'un angle, prise par rapport à son sinus..... n° 38, page 151

Expressions en intégrales définies, des différences finies et infiniment petites, de y , lorsqu'on est parvenu à lui donner l'une ou l'autre des formes $\int x^m \varphi dx$, $\int e^{-x} \varphi dx$ n° 39, page 156

Approximation en séries très-convergentes de $\Delta^n \cdot \frac{1}{s}$, n étant un grand nombre. On en déduit, au moyen des passages du positif au négatif, et du réel à l'imaginaire, l'approximation de $\Delta^n \cdot s^i$. La convergence de la série exige que i surpasse n , et que la différence $i - n$ ne soit pas fort petite par rapport à $s + \frac{n}{2}$.

Expression en série de $\Delta^n \cdot s^i$, dans ce dernier cas..... n° 40, page 157

Expression de la différence $\Delta^n \cdot s^i$, lorsque i est plus petit que n n° 41, page 162

Expression de la somme des termes de $\Delta^n \cdot s^i$, en arrêtant son développement au terme dans lequel la quantité élevée à la puissance i , commence à devenir négative. Approximation en série très-convergente, de la fonction

$$(n+r\sqrt{n})^{n\pm i} - n \cdot (n+r\sqrt{n-2})^{n\pm i} + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} \cdot (n+r\sqrt{n-4})^{n\pm i} - \text{etc.},$$

dans laquelle on rejette les termes où la quantité élevée à la puissance $n \pm i$ est négative, l étant un nombre entier peu considérable par rapport à n n° 42, page 165

Extension des méthodes précédentes aux différences finies très-élevées de la forme $\Delta^n \cdot (s+p)^l \cdot (s+p')^m \cdot \text{etc.}$ n° 43, page 171

Remarque sur la convergence des séries..... n° 44, page 174

LIVRE II.

THÉORIE GÉNÉRALE DES PROBABILITÉS.

CHAP. I. Principes généraux de cette théorie..... page 177

Définition de la probabilité. Sa mesure est le rapport du nombre des cas favorables, à celui de tous les cas possibles.

La probabilité d'un événement composé de deux évènements simples, est le pro-

- duit de la probabilité d'un de ces événemens , par la probabilité que cet événement étant arrivé , l'autre événement aura lieu.
- La probabilité d'un événement futur , tirée d'un événement observé , est le quotient de la division de la probabilité de l'événement composé de ces deux événemens , et déterminée *a priori* , par la probabilité de l'événement observé , déterminée pareillement *a priori*.
- Si un événement observé peut résulter de n causes différentes , leurs probabilités sont respectivement , comme les probabilités de l'événement , tirées de leur existence ; et la probabilité de chacune d'elles , est une fraction dont le numérateur est la probabilité de l'événement dans l'hypothèse de l'existence de la cause , et dont le dénominateur est la somme des probabilités semblables , relatives à toutes les causes. Si ces diverses causes considérées *a priori* , sont inégalement probables ; il faut , au lieu de la probabilité de l'événement , résultante de chaque cause , employer le produit de cette probabilité par celle de la cause elle-même.
- La probabilité d'un événement futur , est la somme des produits de la probabilité de chaque cause , tirée de l'événement observé , par la probabilité que cette cause existant ; l'événement futur aura lieu.
- De l'influence que doit avoir sur les résultats du calcul des probabilités , la différence inconnue qui peut exister entre des événemens simples que l'on suppose également possibles. Cette différence augmente la probabilité des événemens composés de la répétition d'un même événement. n° 1 , page 177
- Des espérances *mathématiques* et *morales*. La première est le produit du bien espéré par la probabilité de l'obtenir ; la seconde dépend de la valeur relative du bien espéré. La règle la plus naturelle et la plus simple , pour apprécier cette valeur , consiste à supposer la valeur relative d'une somme infiniment petite , en raison directe de sa valeur absolue , et en raison inverse du bien total de la personne intéressée. n° 2 , page 187
- CHAP. II. De la probabilité des événemens composés d'événemens simples dont les possibilités respectives sont données.** page 189
- Expression du nombre de combinaisons de n lettres prises r à r , lorsqu'on a égard ou non , à leur situation respective. Application aux loteries. . . . n° 3 , page 189
- Une loterie étant composée de n numéros dont r sortent à chaque tirage , on demande la probabilité qu'après i tirages , tous les numéros seront sortis. Solution générale du problème. Expression très-simple et très-approchée de la probabilité , lorsque n et i sont de grands nombres. Application au cas où $n = 10000$, et $r = 1$. Il y a dans ce cas , un peu moins d'un contre un à parier que tous les numéros sortiront dans 95767 tirages , et un peu plus d'un contre un à parier qu'ils sortiront dans 95768 tirages. Dans le cas de la loterie de France , où $n = 90$ et $r = 5$, il y a un peu moins d'un contre un à parier ,

TABLE DES MATIÈRES.

495

que tous les numéros sortiraient dans 85 tirages, et un peu plus à parier qu'ils sortiraient dans 86 tirages..... n° 4, page 191

Une urne étant supposée renfermer le nombre x de boules, on en tire une partie ou la totalité; et l'on demande la probabilité que le nombre des boules extraites sera pair. Solution du problème. Il y a de l'avantage à parier pour un nombre impair..... n° 5, page 201

Expression de la probabilité d'amener x boules blanches, x' boules noires, x'' boules rouges, etc., en tirant une boule de chacune des urnes dont le nombre est $x + x' + x'' + \text{etc.}$, et qui renferment chacune p boules blanches, q boules noires, r boules rouges, etc..... n° 6, page 203

Déterminer la probabilité de tirer ainsi des urnes précédentes, x boules blanches, avant d'amener soit x' boules noires, soit x'' boules rouges, soit etc. Solution du problème par la méthode des combinaisons. Identité de ce problème avec celui qui consiste à déterminer les sorts d'un nombre n de joueurs dont les adresses respectives sont connues, lorsqu'il manque pour gagner la partie, x coups au premier, x' au second, x'' au troisième, etc..... n° 7, page 205

Solution générale du problème précédent, par l'analyse des fonctions génératrices. Dans le cas de deux joueurs A et B dont les adresses respectives sont égales, le problème est celui que Pascal proposa à Fermat, et que ces deux grands géomètres résolurent. Il revient à imaginer une urne qui renferme deux boules, l'une blanche, et l'autre noire, portant chacune le n° 1; la boule blanche étant pour le joueur A , la boule noire pour le joueur B . On tire de l'urne, une boule que l'on y remet ensuite, pour procéder à un nouveau tirage, et l'on continue ainsi jusqu'à ce que la somme des numéros sortis, favorables à l'un des joueurs, atteigne un nombre donné. Après un certain nombre de tirages, il manque encore au joueur A , le nombre x , et au joueur B , le nombre x' . Les deux joueurs conviennent alors de se retirer du jeu, en partageant l'enjeu qu'ils ont mis en commun; il s'agit de connaître comment doit se faire ce partage. Ce qui revient aux joueurs, doit être évidemment proportionnel à leurs probabilités respectives de gagner la partie. Généralisation et solution de ce problème, 1° en supposant dans l'urne, une boule blanche favorable à A , et portant le n° 1, et deux boules noires favorables à B , et portant l'une, le n° 1, et l'autre, le n° 2; chaque boule diminuant de son numéro, le nombre des points qui manquent au joueur auquel elle est favorable; 2° en supposant dans l'urne, deux boules blanches portant les n° 1 et 2, et deux boules noires, portant les mêmes numéros..... n° 8, page 207

Concevant dans une urne, x boules marquées du n° 1, x' boules marquées du n° 2, et ainsi de suite jusqu'au n° n ; ces boules étant bien mêlées dans l'urne, et tirées toutes successivement, on demande la probabilité qu'il sortira au moins a boules au rang indiqué par leur numéro. Solution générale du problème, et de celui dans lequel, ayant i urnes renfermant chacune le nombre n de boules, toutes de couleurs différentes, et que l'on tire toutes successivement de chaque urne, en

completant le tirage d'une urne, avant de passer à une autre urne ; on demande la probabilité qu'une ou plusieurs boules de la même couleur, sortiront au même rang dans les tirages complets des urnes..... n° 9, page 217

Deux joueurs A et B dont les adresses respectives sont p et q, et dont le premier a le nombre a de jetons, et le second le nombre b, jouent à cette condition, que celui qui perd donne un jeton à son adversaire, et que la partie ne finisse que lorsque l'un des joueurs aura perdu tous ses jetons ; on demande la probabilité que l'un des joueurs gagnera la partie avant ou au n^o coup. Fonction génératrice de cette probabilité, d'où l'on tire l'expression générale de la probabilité. Expression de la probabilité que la partie finira avant ou au n^o coup. Ce qu'elle devient, lorsqu'on suppose a infini. Valeur très-approchée de la même expression, lorsque l'on suppose de plus p et q égaux, et lorsque b est un nombre considérable. Si $b = 100$, il y a du désavantage à parier un contre un, que A gagnera la partie dans 23780 coups ; mais il y a de l'avantage à parier qu'il la gagnera dans 23781 coups..... n° 10, page 225

Un nombre $n + 1$ de joueurs jouent ensemble aux conditions suivantes. Deux d'entre eux jouent d'abord, et celui qui perd se retire après avoir mis un franc au jeu, pour n'y rentrer qu'après que tous les autres joueurs ont joué ; ce qui a lieu généralement pour tous les joueurs qui perdent, et qui par là deviennent les derniers. Celui des deux premiers joueurs qui a gagné, joue avec le troisième, et s'il le gagne, il continue de jouer avec le quatrième, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'il perde, ou jusqu'à ce qu'il ait gagné successivement tous les joueurs. Dans ce dernier cas, la partie est finie. Mais si le joueur gagnant au premier coup, est vaincu par l'un des autres joueurs ; le vainqueur joue avec le joueur suivant, et continue de jouer jusqu'à ce qu'il soit vaincu, ou jusqu'à ce qu'il ait gagné de suite tous les joueurs. Le jeu continue ainsi jusqu'à ce qu'un des joueurs gagne de suite tous les autres, ce qui finit la partie ; et alors le joueur qui la gagne, emporte tout ce qui a été mis au jeu. Cela posé, on demande, 1° la probabilité que le jeu finira avant ou au nombre x de coups ; 2° la probabilité que l'un quelconque des joueurs gagnera la partie dans ce nombre de coups ; 3° son avantage. Solution générale du problème. Fonctions génératrices de ces trois quantités, d'où l'on tire leurs valeurs. Expressions fort simples de ces quantités, lorsque x est infini, ou lorsque le jeu est continué indéfiniment..... n° 11, page 238

q étant la probabilité d'un événement simple à chaque coup, on demande la probabilité de l'amener i fois de suite, dans le nombre x de coups. Solution du problème. Fonction génératrice de cette probabilité, d'où l'on tire l'expression de la probabilité.

Deux joueurs A et B, dont les adresses respectives sont q et $1 - q$, jouent à cette condition, que celui des deux qui aura le premier vaincu i fois de suite son adversaire, gagnera la partie ; on demande les probabilités respectives des joueurs pour gagner la partie, avant ou au coup x. Solution du problème, au moyen

TABLE DES MATIÈRES.

497

- des fonctions génératrices. Expressions de ces probabilités dans le cas de x infini. Sorts respectifs des joueurs, en supposant qu'à chaque coup qu'ils perdent, ils déposent un franc au jeu. n° 12, page 247
- Une urne étant supposée contenir $n+1$ boules, distinguées par les n° 0, 1, 2, 3, ... n; on en tire une boule que l'on remet dans l'urne, après le tirage; on demande la probabilité qu'après i tirages, la somme des nombres amenés sera égale à s . Solution du problème, fondée sur un artifice singulier qui consiste dans l'emploi d'une caractéristique propre à faire connaître la diminution successive qu'il faut faire subir à la variable, dans chaque terme du résultat final des intégrations successives; lorsqu'elles sont discontinues. Application de la solution au problème qui consiste à déterminer la probabilité d'amener un nombre donné, en projetant i dés chacun, d'un nombre $n+1$ de faces; et au problème où l'on cherche la probabilité que la somme des inclinaisons à l'écliptique, d'un nombre s d'orbites, sera comprise dans des limites données, en supposant toutes les inclinaisons depuis zéro jusqu'à l'angle droit, également possibles. On fait voir que l'existence d'une cause commune qui a dirigé les mouvemens de rotation et de révolution des planètes et des satellites, dans le sens de la rotation du soleil, est indiquée avec une probabilité excessivement approchante de la certitude, et bien supérieure à celle du plus grand nombre des faits historiques, sur lesquels on ne se permet aucun doute. — Cette solution appliquée au mouvement et aux orbites des cent comètes observées jusqu'à ce jour, prouve que rien n'indique dans ces astres, une cause primitive qui ait tendu à les faire mouvoir dans un sens plutôt que dans un autre, ou sous une inclinaison plutôt que sous une autre, au plan de l'écliptique. n° 13, page 253*
- Solution du problème exposé au commencement du numéro précédent, dans le cas où le nombre des boules qui portent le même numéro, n'est pas égal à l'unité, et varie suivant une loi quelconque. n° 14, page 261
- Application de l'artifice exposé dans le n° 13, à la solution de ce problème. Soient i quantités variables dont la somme est s , et dont les lois de possibilité sont continues, et peuvent être discontinues; on propose de trouver la somme des produits de chaque valeur que peut recevoir une fonction quelconque de ces variables, multipliée par la probabilité correspondante à cette valeur. Application de cette solution à la recherche de la probabilité que l'erreur du résultat d'un nombre quelconque d'observations dont les lois de facilité des erreurs, sont exprimées par des fonctions rationnelles et entières de ces erreurs, sera comprise dans des limites données.
- Application de la même solution à la recherche d'une règle propre à faire connaître le résultat le plus probable des opinions émises par les divers membres d'un tribunal; cette règle n'est point applicable aux choix des assemblées électtorales. Règle relative à ces choix, lorsqu'on fait abstraction des passions des électeurs, et des considérations étrangères au mérite, qui peuvent les déterminer.

Ces diverses causes rendant cette règle sujette à de graves inconvénians qui l'ont fait abandonner.

Recherche de la loi de probabilité des erreurs des observations, moyenne entre toutes celles qui satisfont aux conditions que les erreurs positives soient les mêmes que les erreurs négatives, et que leur probabilité diminue quand elles augmentent..... n° 15, page 262

CHAP. III. Des lois de la probabilité, qui résultent de la multiplication indéfinie des événemens..... page 275

p étant la probabilité de l'arrivée d'un événement simple à chaque coup, et $1 - p$ celle de sa non-arrivée; déterminer la probabilité que sur un très-grand nombre n de coups, le nombre de fois que l'événement aura lieu, sera compris dans des limites données. Solution du problème. Le nombre de fois le plus probable, est np . Expression de la probabilité que ce nombre de fois sera compris dans les limites $np \pm l$. Les limites $\pm l$ restant les mêmes, cette probabilité augmente avec le nombre n de coups: la probabilité restant la même, le rapport de l'intervalle $2l$ des limites au nombre n , se resserre quand n augmente; et dans le cas de n infini, ce rapport devient nul, et la probabilité se change en certitude. La solution du problème précédent sert encore à déterminer la probabilité que la valeur de p supposée inconnue, est comprise dans des limites données, lorsque sur un très-grand nombre n de coups, on connaît le nombre i des événemens correspondans à p qui sont arrivés: p est alors à très-peu près $\frac{i}{n}$; et généralement; lorsque dans un coup, il doit arriver l'un quelconque de plusieurs événemens simples, les probabilités respectives de ces événemens sont à très-peu près proportionnelles au nombre de fois qu'ils arriveront dans un très-grand nombre n de coups. P étant la probabilité de l'arrivée d'un événement composé de deux événemens simples dont p et $1 - p$ sont les possibilités respectives, et $1 - P$ étant la probabilité de la non-arrivée de cet événement composé; si sur un très-grand nombre n d'arrivées et de non-arrivées du même événement, on connaît le nombre i de ses arrivées; on a la probabilité que la valeur de P sera comprise dans des limites données; et comme P est une fonction connue de p , on en conclut la probabilité que la valeur de p sera comprise dans des limites données..... n° 16, page 275

Une urne A renfermant un très-grand nombre n de boules blanches et noires; à chaque tirage, on en extrait une que l'on remplace par une boule noire; on demande la probabilité qu'après r tirages, le nombre des boules blanches sera x .

La solution du problème dépend d'une équation linéaire aux différences finies partielles du premier ordre, à coefficients variables. Réduction de cette équation à

TABLE DES MATIÈRES.

499

une équation aux différences partielles infiniment petites. Intégration de cette dernière équation. Application de la solution, au cas où l'urne est remplie primitivement, de cette manière : on projette un prisme droit dont la base étant un polygone régulier de $p + q$ côtés, est assez étroite pour que le prisme ne retombe jamais sur elle : sur les $p + q$ faces latérales, p sont blanches, et q sont noires, et l'on met dans l'urne A , à chaque projection, une boule de la couleur de la face sur laquelle le prisme retombe.

Deux urnes A et B renfermant chacune un très-grand nombre n de boules blanches et noires, le nombre des blanches étant égal à celui des noires, dans la totalité des boules; on tire en même temps une boule de chaque urne, et l'on remet dans une urne la boule extraite de l'autre. En répétant un nombre quelconque r de fois cette opération, on demande la probabilité qu'il y aura x boules blanches dans l'urne A.

Le problème dépend d'une équation linéaire aux différences finies partielles du second ordre, à coefficients variables. Réduction de cette équation, à une équation aux différences partielles infiniment petites du second ordre. Intégration de cette dernière équation, au moyen d'une intégrale définie. Développement de cette intégrale, en séries. Détermination des constantes de la série, au moyen de sa valeur initiale. Théorèmes analytiques relatifs à cet objet. Application de la solution, au cas où l'urne A est primitivement remplie, comme dans le problème précédent. Valeur moyenne des boules blanches de chaque urne, après r tirages. Expression générale de cette valeur, dans le cas où l'on a un nombre e d'urnes disposées circulairement, et renfermant chacune un grand nombre n de boules, les unes blanches et les autres noires; chaque tirage consistant à extraire en même temps, une boule de chaque urne, et à la remettre dans la suivante, en partant de l'une d'elles, dans un sens déterminé..... n° 17, page 284

CHAP. IV. De la probabilité des erreurs des résultats moyens d'un grand nombre d'observations, et des résultats moyens les plus avantageux..... page 304

Déterminer la probabilité que la somme des erreurs d'un grand nombre d'observations, sera comprise dans des limites données, en supposant que la loi de possibilité des erreurs est connue, et la même pour chaque observation, et que les erreurs négatives sont aussi possibles que les erreurs positives correspondantes. Expression générale de cette probabilité..... n° 18, page 304

Déterminer dans les suppositions précédentes, la probabilité que la somme des erreurs d'un grand nombre d'observations, ou la somme de leurs carrés, de leurs cubes, etc., sera comprise dans des limites données, abstraction faite

- du signe.* Expression générale de cette probabilité, et de la somme la plus probable. n° 19, page 309
- Un élément étant connu à fort peu près, déterminer sa correction par l'ensemble d'un grand nombre d'observations.* Formation des équations de condition. En les disposant de manière que dans chacune d'elles, le coefficient de la correction de l'élément ait le même signe, et les ajoutant, on forme une équation finale qui donne une correction moyenne. Expression de la probabilité que l'erreur de cette correction moyenne est comprise dans des limites données. La manière la plus générale de former l'équation finale, est de multiplier chaque équation de condition, par un facteur indéterminé, et d'ajouter tous ces produits. Expression de la probabilité que l'erreur de la correction donnée par cette équation finale, est comprise dans des limites données. Expression de l'erreur moyenne que l'on peut craindre en plus ou en moins. Détermination du système de facteurs, qui rend cette erreur un *minimum*. On est conduit alors au résultat que donne la méthode des moindres carrés des erreurs des observations. Erreur moyenne de son résultat. Son expression dépend de la loi de facilité des erreurs des observations. Moyen de l'en rendre indépendant. n° 20, page 312
- Corriger par l'ensemble d'un grand nombre d'observations plusieurs éléments déjà connus à fort peu près,* Formation des équations de condition. En les multipliant chacune par un facteur indéterminé, et ajoutant les produits, on forme une première équation finale : un second système de facteurs, donne une seconde équation finale, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on ait autant d'équations finales, qu'il y a d'éléments à corriger. Expression des erreurs moyennes que l'on peut craindre sur chaque élément corrigé par ces équations finales. Détermination des systèmes de facteurs, par la condition que ces erreurs moyennes soient des *minima*. On retombe dans la méthode des moindres carrés des erreurs des observations ; d'où il suit que cette méthode est celle que le calcul des probabilités indique comme étant la plus avantageuse. Expression des erreurs moyennes qu'elle laisse encore à craindre en plus ou en moins, sur chaque élément. Ces expressions sont indépendantes de la loi de facilité des erreurs de chaque observation, et ne renferment que des données des observations. Moyen simple de comparer entre elles, du côté de la précision, diverses tables astronomiques d'un même astre. n° 21, page 322
- Examen du cas où la possibilité des erreurs négatives, n'est pas la même que celle des erreurs positives.* Résultat moyen vers lequel converge la somme des produits des erreurs d'un grand nombre d'observations, par des facteurs quelconques ; probabilité de cette convergence. n° 22, page 329
- Examen du cas où l'on considère les observations déjà faites.* Alors l'erreur de la première, donne les erreurs de toutes les autres. La probabilité de cette erreur, prise à *posteriori*, ou d'après les observations déjà faites, est le produit des

TABLE DES MATIÈRES.

501

probabilités respectives, *à priori*, des erreurs de chaque observation. En concevant donc une courbe dont l'abscisse soit l'erreur de la première observation, et dont ce produit soit l'ordonnée; cette courbe sera celle des probabilités, *à posteriori*, des erreurs de la première observation. L'erreur qu'il faut lui supposer est l'abscisse correspondante à l'ordonnée qui divise l'aire de la courbe, en deux parties égales. La valeur de cette abscisse dépend de la loi inconnue des probabilités, *à priori*, des erreurs des observations; et dans cette ignorance, il convient de s'en tenir au résultat le plus avantageux, déterminé, *à priori*, par les articles précédens. Recherche de la loi des probabilités, *à priori*, des erreurs, qui donne constamment la somme des erreurs, nulle pour le résultat qu'il faut choisir *à posteriori*. Cette loi donne généralement la règle du *minimum* des carrés des erreurs des observations. Cette dernière règle devient nécessaire, lorsque l'on doit choisir un résultat moyen entre plusieurs résultats donnés chacun, par un grand nombre d'observations de divers genres..... n° 23, page 333

Recherche du système de corrections de plusieurs élémens, par un grand nombre d'observations, qui rend un *minimum*, abstraction faite du signe, la plus grande des erreurs qu'il leur suppose. Ce système est celui qui rend un *minimum*, la somme des puissances semblables, très-élevées et paires, de chaque erreur. Il diffère peu du système donné par la méthode des moindres carrés des erreurs des observations. Histoire historique sur les méthodes de correction des élémens, par les observations..... n° 24, page 343

CHAP. V. Application du Calcul des Probabilités, à la recherche des phénomènes et de leurs causes..... page 349

On peut par l'analyse des chapitres précédens, appliquée à un grand nombre d'observations, déterminer la probabilité de l'existence des phénomènes dont l'étendue est assez petite pour être comprise dans les limites des erreurs de chaque observation. Formules qui expriment que les probabilités de l'existence du phénomène et de son étendue, sont comprises dans des limites données. Application à la variation diurne du baromètre, et à la rotation de la terre, déduite des expériences sur la chute des corps. La même analyse est applicable aux questions les plus délicates de l'astronomie, de l'économie politique, de la médecine, etc., et à la solution des problèmes sur les hasards, trop compliqués, pour être résolus directement par l'analyse. Un plancher étant divisé en petits carreaux rectangles, par des lignes parallèles et perpendiculaires entre elles; déterminer la probabilité qu'en projetant au hasard, une aiguille, elle retombera sur un joint de ces carreaux..... n° 25, page 349

CHAP. VI. De la probabilité des causes et des événemens futurs, tirée des événemens observés..... page 363

Un événement observé étant composé d'événemens simples du même genre, et dont

- La possibilité est inconnue ; déterminer la probabilité que cette possibilité est comprise dans des limites données. Expression de cette probabilité. Formule pour la déterminer par une série très-convergente, lorsque l'événement observé est composé d'un grand nombre de ces évènements simples. Extension de cette formule, au cas où l'événement observé est composé de plusieurs genres différens d'évènements simples..... n° 26, page 363*
- Application de ces formules aux problèmes suivans. Deux joueurs A et B jouent ensemble à cette condition, que celui qui sur trois coups en aura gagné deux, gagnera la partie, le troisième coup n'étant pas joué comme inutile, si le même joueur gagne les deux premiers coups. Sur un grand nombre n de parties gagnées, A en a gagné le nombre i ; on demande la probabilité que son adresse, respectivement au joueur B, est comprise dans des limites données.*
- On demande la probabilité que le nombre des coups joués est compris dans des limites déterminées. Enfin, ce dernier nombre étant supposé connu, on demande la probabilité que le nombre des parties est compris dans des limites données.*
- Solutions de ces divers problèmes..... n° 27, page 369*
- Application des formules du n° 26, aux naissances observées dans les principaux lieux de l'Europe. Partout le nombre des naissances des garçons est supérieur à celui des naissances des filles. Déterminer la probabilité qu'il existe une cause constante de cette supériorité, d'après les naissances observées dans un lieu donné. Solution du problème. Cette probabilité pour Paris, diffère excessivement peu de l'incertitude..... n° 28, page 377*
- A Paris, le rapport des baptêmes des garçons à ceux des filles, est $\frac{25}{24}$, tandis qu'à Londres, ce rapport est $\frac{19}{18}$. Déterminer la probabilité qu'il existe une cause constante de cette différence. Solution du problème. Cette probabilité est très-grande. Conjecture vraisemblable sur cette cause..... n° 29, page 381*
- Recherche de la probabilité des résultats fondés sur les tables de mortalité ou d'assurance, construites sur un grand nombre d'observations.*
- Supposant que sur un grand nombre p d'individus de l'âge A, on ait observé qu'il en existe q à l'âge A + a, r à l'âge A + a + a', etc., déterminer la probabilité que sur un grand nombre p' d'individus du même âge A, il en existera $\frac{p'q}{p} \pm z$ à l'âge A + a, $\frac{p'r}{p} \pm z'$ à l'âge A + a', etc. Solution du problème. Il en résulte qu'en augmentant le nombre p, on approche sans cesse de la vraie loi de mortalité, avec laquelle les résultats des observations coïncideraient, si p était infini..... n° 30, page 384*
- Évaluer au moyen des naissances annuelles, la population d'un vaste empire. Solution du problème. Application à la France. Probabilité que l'erreur de cette évaluation sera comprise dans des limites données..... n° 31, page 391*

TABLE DES MATIÈRES.

503

- Expression de la probabilité d'un événement futur, tirée d'un événement observé. Lorsque l'événement futur est composé d'un nombre d'événemens simples, beaucoup plus petit que celui des événemens simples qui entrent dans l'événement observé; on peut sans erreur sensible, déterminer la possibilité de l'événement futur, en supposant à chaque événement simple, la possibilité qui rend l'événement observé, le plus probable..... n° 32, page 394
- Depuis l'époque où l'on a distingué à Paris, sur les registres, les naissances de chaque sexe, on a observé que le nombre des naissances masculines l'emporte sur celui des naissances féminines; déterminer la probabilité que cette supériorité annuelle se maintiendra dans un intervalle de tems donné, par exemple, dans l'espace d'un siècle..... n° 33, page 397
- CHAP. VII. De l'influence des inégalités inconnues qui peuvent exister entre des chances que l'on suppose parfaitement égales,**
..... page 402
- Examen des cas dans lesquels cette influence est favorable ou contraire. Elle est contraire à celui qui, au jeu de *croix* et *pile*, parie d'amener *croix* un nombre impair de fois, dans un nombre pair de coups. Moyen de corriger cette influence..... n° 34, page 402
- CHAP. VIII. Des durées moyennes de la vie, des mariages et des associations quelconques.....** page 408
- Expression de la probabilité que la durée moyenne de la vie d'un grand nombre n d'enfans, sera comprise dans ces limites, vraie durée moyenne de la vie, plus ou moins une quantité donnée très-petite. Il en résulte que cette probabilité croît sans cesse à mesure que le nombre des enfans augmente, et que dans le cas d'un nombre infini, cette probabilité se confond avec la certitude, l'intervalle des limites devenant infiniment petit ou nul. Expression de l'erreur moyenne que l'on peut craindre en prenant pour durée moyenne de la vie, celle d'un grand nombre d'enfans. Règle pour conclure des tables de mortalité, la durée moyenne de ce qui reste à vivre, à une personne d'un âge donné..... n° 35, page 408
- Expression de la durée moyenne de la vie, si l'une des causes de mortalité vient à s'éteindre. Expression particulière au cas où l'on parvient à détruire une maladie qu'on ne peut contracter qu'une fois dans la vie. L'extinction de la petite vérole, au moyen de la vaccine, accroîtrait de plus de trois années, la durée moyenne de la vie, si l'accroissement de population qui en résulterait, n'était point arrêté par le défaut de subsistances..... n° 36, page 412
- De la durée moyenne des mariages. Expression de leur durée moyenne la plus

probable, et de la probabilité que l'erreur de cette expression est comprise dans des limites données. De la durée moyenne des associations formées d'un nombre quelconque d'individus..... n° 37, page 415

CHAP. IX. Des bénéfices dépendans de la probabilité des événemens futurs..... page 419

Si l'on attend un nombre quelconque d'événemens simples dont les probabilités soient connues, et dont l'arrivée procure un avantage, leur non-arrivée causant une perte; déterminer le bénéfice mathématique résultant de leur attente. Expression de la probabilité que le bénéfice réel sera compris dans des limites données, quand le nombre des événemens attendus est très-grand. Quelque peu d'avantage que produise chaque événement attendu; le bénéfice devient infiniment grand et certain, quand le nombre des événemens est supposé infini. n° 38, p. 419

Si les diverses chances d'un événement attendu, produisent des avantages et des pertes dont les probabilités respectives soient données; déterminer le bénéfice mathématique résultant de l'attente d'un nombre quelconque d'événemens semblables. Expression de la probabilité que le bénéfice réel sera compris dans des limites données, lorsque ce nombre est très-grand..... n° 39, page 423

Des bénéfices des établissemens fondés sur les probabilités de la vie. Expression du capital qu'il faut donner pour constituer une rente sur une ou plusieurs têtes. Expression de la rente qu'un individu doit donner à un établissement, pour assurer à ses héritiers un capital payable à sa mort. Expression de la probabilité que le bénéfice réel de l'établissement sera compris dans des limites données, en supposant qu'un grand nombre d'individus, en constituant chacun une rente sur sa tête, versent chacun une somme déterminée dans la caisse de l'établissement, pour subvenir à ses frais..... n° 40, page 426

CHAP. X. De l'espérance morale..... page 432

*Expression de la fortune morale, en partant de ce principe, que le bien moral procuré à un individu, par une somme infiniment petite, est proportionnel à cette somme divisée par la fortune physique de cet individu. Expression de la fortune morale résultante de l'expectative d'un nombre quelconque d'événemens qui procurent des bénéfices dont les probabilités respectives sont connues. Expression de fortune physique correspondante à cette fortune morale. L'accroissement de cette fortune physique, résultant des événemens attendus, est ce que je nomme *avantage moral relatif à ces événemens*. Conséquences qui résultent de ces expressions. Le jeu mathématiquement le plus égal, est toujours désavantageux. Il vaut mieux exposer sa fortune par parties, à des dangers indépendans les uns des autres, que de l'exposer toute entière au même danger. En divisant ainsi sa fortune, l'avantage moral se rapproche sans cesse de l'avantage mathématique, et finit par coïncider avec lui, lorsque la division est*

TABLE DES MATIÈRES.

505

supposée infinie. L'avantage moral peut être augmenté au moyen des caisses d'assurance, en même tems que ces caisses produisent aux assureurs un bénéfice certain.....	n° 41, page 43a
Explication, au moyen de la théorie précédente, d'un paradoxe que présente le calcul des probabilités.....	n° 42, page 439
Comparaison de l'avantage moral du placement d'un même capital, sur une tête, avec celui du placement sur deux têtes. On peut à la fois, par de semblables placemens, accroître son propre avantage, et assurer dans l'avenir le sort des personnes qui nous intéressent.....	n° 43, page 44a
CHAP. XI. De la probabilité des témoignages.....	
<i>On a extrait un numéro d'une urne qui en renferme le nombre n; un témoin de ce tirage, dont la véracité et la probabilité qu'il ne se méprend point, sont supposées connues, annonce la sortie du n° i; on demande la probabilité de cette sortie.....</i>	<i>n° 44, page 446</i>
<i>On a extrait une boule d'une urne qui contient $n - 1$ boules noires, et une boule blanche. Un témoin du tirage annonce que la boule extraite est blanche; on demande la probabilité de cette sortie. Si le nombre n est très-grand, ce qui rend extraordinaire la sortie de la boule blanche, la probabilité de l'erreur ou du mensonge du témoin, devient fort approchante de la certitude; ce qui montre comment les faits extraordinaires affaiblissent la croyance due aux témoignages.....</i>	<i>n° 45, page 449</i>
<i>L'urne A contient n boules blanches; l'urne B contient le même nombre de boules noires; on a extrait une boule de l'une de ces urnes, et on l'a mise dans l'autre urne dont on a ensuite extrait une boule. Un témoin du premier tirage annonce qu'il a vu sortir une boule blanche. Un témoin du second tirage annonce qu'il a vu pareillement extraire une boule blanche. On demande la probabilité de cette double sortie. Pour que cette double sortie ait lieu, il faut qu'une boule blanche extraite de l'urne A au premier tirage, mise ensuite dans l'urne B, en ait été extraite au second tirage; ce qui est un événement fort extraordinaire, lorsque le nombre n de boules noires avec lesquelles on l'a mêlée, est très-considérable. La probabilité de cet événement devient alors très-petite; d'où il suit que la probabilité du fait, résultante de l'ensemble de plusieurs témoignages, décroît à mesure que ce fait devient plus extraordinaire.....</i>	<i>n° 46, page 451</i>
<i>Deux témoins attestent la sortie du n° i, d'une urne qui en renferme le nombre n, et dont on n'a extrait qu'un numéro. On demande la probabilité de cette sortie.</i>	
<i>Un des témoins atteste la sortie du n° i, et l'autre atteste la sortie du n° j; déterminer la probabilité de la sortie du n° i.....</i>	<i>n° 47, page 453</i>
<i>Une ou plusieurs chaînes traditionnelles de r témoins transmettent la sortie du n° i, d'une urne qui en contient le nombre n; déterminer la probabilité de cette sortie.....</i>	<i>n° 48, page 456</i>

TABLE DES MATIÈRES.

On connaît les véracités respectives de deux témoins, dont un au moins, et peut-être tous deux, attestent la sortie du n° i , d'une urne qui en contient le nombre n ; déterminer la probabilité de cette sortie..... n° 49, page 458

Les jugemens des tribunaux peuvent être assimilés aux témoignages. Déterminer la probabilité de la bonté de ces jugemens..... n° 50, page 450

ADDITION I. On déduit de l'analyse du n° 34 du premier livre, l'expression du rapport de la circonférence au rayon, donnée par Wallis, en produits infinis. Analyse de la méthode remarquable par laquelle ce grand géomètre y est parvenu, méthode qui contient les germes des théories des interpolations et des intégrales définies..... page 45a

II. Démonstration directe de l'expression de $\Delta^n . s^i$, trouvée dans le n° 40 du premier livre, par les passages du positif au négatif et du réel à l'imaginaire... page 470

III. Démonstration de la formule (p) du n° 43 du premier livre, ou de l'expression des différences finies des puissances, lorsque l'on arrête cette expression au terme où la quantité élevée à la puissance, devient négative.... page 475

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.