

Federico Cafiero

LEZIONI
DI
ANALISI MATEMATICA

PARTI PRIMA

11^a EDIZIONE RIVEDUTA

LIGUORI EDITORE

INDICE

Capitolo I .	TEORIA DEGLI INSIEMI	pag.	1
1 -	Prime notazioni	"	1
2 -	Proprietà definite in un insieme	"	4
3 -	Sottoinsiemi e parti di un insieme	"	6
4 -	L'inclusione. Sottoinsiemi disgiunti	"	9
5 -	Prodotto combinatorio (o diretto) di insiemi. Relazione tra gli elementi di un insieme e quelli di un altro	"	10
6 -	Funzioni o applicazioni	"	12
7 -	Restrizioni e prolungamenti di funzioni	"	16
8 -	Applicazioni biunivoche - Applicazione inversa di un'applicazione biunivoca	"	16
9 -	Funzioni composte	"	18
10 -	L'operazione di unione	"	18
11 -	L'operazione di intersezione	"	20
12 -	L'operazione di complemento	"	22
13 -	Relazioni di De Morgan	"	23
14 -	Proprietà distributiva dell'unione e dell'intersezione	"	24
15 -	Proprietà distributiva del complemento	"	24
16 -	Immagine e antimmagine di un insieme per mezzo di una funzione	"	25
17 -	Relazione d'ordine. Insiemi ordinati, totalmente ordinati	"	29
18 -	Minimo e massimo di un insieme ordinato	"	32
19 -	Estremo inferiore ed estremo superiore di un sottoinsieme di un insieme ordinato	"	34
20 -	Funzioni monotone	"	37
21 -	Relazione d'equivalenza. Ricoprimento, partizione ed insieme quoziente di un insieme	"	38
22 -	Ragionamento per ricorrenza	"	41
CAPITOLO II.	CORRISPONDENZE BIUNIVOCHE	"	42
1 -	Corrispondenza biunivoca fra due insiemi. Disuguaglianze tra potenze d'insiemi	"	42
2 -	Insiemi finiti, insiemi infiniti	"	44
3 -	Insiemi numerabili	"	46

4 - Esempi di insiemi infiniti non numerabili	pag. 47
5 - Permutazioni di un insieme	" 48
6 - Classe di una permutazione dei primi n interi naturali	" 49

CAPITOLO III - L'INSIEME DEI NUMERI RAZIONALI " 53

1 - L'insieme dei numeri razionali	" 53
2 - L'addizione nell'insieme dei numeri razionali	" 54
3 - La moltiplicazione nell'insieme dei numeri razionali	" 56
4 - La sottrazione e la divisione nel campo dei numeri razionali	" 58
5 - Il campo ordinato dei numeri razionali	" 59
6 - Multiplo intero e potenze di un numero razionale	" 62
7 - Valore assoluto di un numero razionale	" 63

CAPITOLO IV - GRUPPI E CAMPI. IL CAMPO ORDINATO DEI NUMERI REALI " 65

1 - Leggi di composizione interna	" 65
2 - Gruppi	" 69
3 - Campi	" 73
4 - Campi ordinati	" 76
5 - Valore assoluto di un elemento di un campo ordinato	" 80
6 - Isomorfismi	" 81
7 - Sottocampo razionale di un campo ordinato - Campi ordinati archimedei	" 82
8 - Campi ordinati completi	" 85
9 - Il campo ordinato dei numeri reali	" 88
10 - Il problema del completamento di un campo ordinato archimedeo	" 90
11 - Intervalli di $\mathbb{R}$. Potenza del continuo	" 100
12 - Formule del binomio	" 103

CAPITOLO V - ELEMENTI DI TOPOLOGIA IN $\mathbb{R}^n$ " 108

1 - Intervalli di $\mathbb{R}^n$	" 108
2 - Spazio numerico a n dimensioni. Insiemi aperti, insiemi chiusi	" 110

3 - Interni	pag. 112
4 - Interno ed esterno di un insieme	" 113
5 - Aderenza di un insieme	" 114
6 - Punti d'accumulazione di un insieme	" 115
7 - Frontiera di un insieme	" 116
8 - Sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ densi	" 118
9 - Sottospazi dello spazio numerico a n dimensioni	" 119
10 - Limite e valore d'aderenza di una successione di punti di $\mathbb{R}^n$	" 122
11 - Successioni limitate di punti di $\mathbb{R}^n$	" 133
12 - Il secondo teorema di Bolzano-Weierstrass e i teoremi di Cantor	" 137
13 - Sottoinsiemi compatti di $\mathbb{R}^n$	" 140
 CAPITOLO VI - SUCCESSIONI DI NUMERI REALI	" 144
1 - L'insieme ampliato dei numeri reali	" 144
2 - Operazioni algebriche in $\mathbb{R}$	" 145
3 - Intervalli di $\mathbb{R}$	" 146
4 - Interni di $+\infty$ e di $-\infty$	" 148
5 - Successioni di numeri reali divergenti	" 148
6 - Successioni regolari	" 154
7 - Limite superiore e limite inferiore di una successione di numeri reali	" 172
8 - Il criterio di convergenza di Cauchy	" 174
 CAPITOLO VII - LIMITI DI FUNZIONI	" 176
1 - Funzioni numeriche	" 176
2 - Limite di una funzione	" 176
3 - Teoremi fondamentali per la ricerca del limite di una funzione	" 182
4 - Teoremi notevoli sui limiti di funzioni numeriche	" 189
5 - Sulla ricerca del limite di una funzione a valori in $\mathbb{R}^n$	" 198
6 - Limite a destra e limite a sinistra di una funzione numerica di una variabile reale	" 199
7 - Teoremi fondamentali per la ricerca del limite di una funzione numerica monotona	" 201

CAPITOLO VIII - FUNZIONI CONTINUE	pag.	210
1 - Funzioni continue in un punto	"	210
2 - Proprietà notevoli delle funzioni numeriche continue in un punto	"	213
3 - Proprietà delle funzioni continue nel loro insieme di definizione	"	216
4 - Insiemi connessi	"	219
5 - Proprietà notevoli delle funzioni numeriche monotone	"	227
6 - Prolungamento per continuità di una funzione	"	231
7 - Funzioni discontinue	"	234
CAPITOLO IX - FUNZIONI ELEMENTARI	"	235
1 - Radice n-esima di un numero reale non negativo	"	235
2 - La funzione esponenziale	"	238
3 - La funzione logaritmica	"	244
4 - La funzione potenza	"	246
4 bis - Le funzioni trigonometriche	"	249
5 - Limiti notevoli	"	251
6 - Funzioni elementari	"	255
7 - Funzioni composte	"	259
CAPITOLO X - DERIVAZIONE	"	266
1 - Derivata di una funzione numerica di una variabile	"	266
2 - Derivata a destra e derivata a sinistra di una funzione numerica di una variabile	"	270
3 - Prime proprietà notevoli delle funzioni derivabili	"	272
4 - Derivazione delle funzioni elementari	"	276
5 - Grafico di una funzione numerica di una variabile	"	290
6 - Tangente a una curva di R^n	"	292
7 - Asintoti di una curva di R^n	"	300
8 - Funzioni numeriche di una variabile reale crescenti o decrescenti in un punto	"	302
9 - Massimo e minimo relativi - Condizione necessaria	"	304
10 - I teoremi di Rolle, di Lagrange e di Cauchy	"	308
11 - Discontinuità della derivata	"	312

12 - Teoremi dell'Hospital	pag 317
13 - Formula di Taylor	" 328
14 - Massimo e minimo relativi. Condizione sufficiente	" 331
15 - Concavità, convessità, flessi	" 332
Grafico delle funzioni elementari	" 344
16 - Infinitesimi	" 352
17 - Differenziale di una funzione derivabile	" 360
18 - Differenziale n-esimo di una funzione derivabile n volte	" 364
CAPITOLO XI - LE SERIE	" 367
1 - Serie definita da una successione	" 367
2 - Serie a termini non negativi	" 375
3 - Serie alternante	" 377
4 - Serie assolutamente convergenti	" 382
5 - Criteri di convergenza	" 384
6 - Prodotto di due serie	" 392
CAPITOLO XII - RAPPRESENTAZIONE IN BASE b DEL CAMPO DEI NUMERI REALI	" 395
1 - Rappresentazione in base b di un numero naturale	" 395
2 - Rappresentazione in base b di un numero reale	" 399
3 - Numeri reali periodici	" 405
4 - Rappresentazione in base b del campo dei numeri reali	" 411
5 - Rappresentazione impropria di un numero reale	" 417
CAPITOLO XIII - METRICA EUCLIDEA - CONTINUITÀ UNIFORME	" 422
1 - L'identità di Lagrange	" 422
2 - La metrica euclidea	" 423
3 - Lo spazio euclideo a k dimensioni	" 424
4 - Diametro di un insieme. Oscillazione di una funzione	" 429
5 - Domini e continui di f^k	" 430
6 - Successioni di Cauchy	" 432
7 - Il criterio di convergenza di Cauchy per una funzione	" 434

8. Funzioni uniformemente continue	pag. 436
CAPITOLO XIV - I NUMERI COMPLESSI	" 440
1 - Il campo dei numeri complessi	" 440
2 - Coniugate di un numero complesso	" 442
3 - Notazione algebrica di un numero complesso	" 443
4 - Spazio numerico complesso ad una dimensione	" 445
5 - Forma trigonometrica di un numero complesso. Formula di Moivre	" 446
6 - Radice n -ma di un numero complesso	" 448
7 - Limite e valore d'aderenza di una successione di numeri complessi	" 452
8 - Serie di numeri complessi	" 452
CAPITOLO XV - CENNI SULLE FUNZIONI COMPLESSE	" 455
1 - Funzione complessa di k variabili reali	" 455
2 - Derivata di una funzione complessa di una variabile reale	" 458
3 - Funzioni complesse di una variabile complessa	" 459
CAPITOLO XVI - POLINOMI	" 463
1 - Funzioni polinomie	" 463
2 - Il principio d'identita' dei polinomi	" 464
3 - Formula di Taylor per un polinomio in C	" 465
4 - Il teorema fondamentale dell'algebra	" 467
5 - Divisione	" 470
6 - Zeri di un polinomio	" 477
7 - Relazioni tra gli zeri e le derivate di un polinomio	" 480
8 - Relazione tra gli zeri ed i coefficienti di un polinomio	" 481
9 - Polinomi a coefficienti reali	" 482
NOTAZIONI PRINCIPALI	" 485
INDICE ANALITICO	" 487