

FRANCESCO SEVERI

GIUSEPPE SCORZA DRAGONI

LEZIONI DI ANALISI

VOLUME TERZO

CON INDICI ANALITICI E GENERALE

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE E
LORO SISTEMI - PROBLEMI AL CONTO RNO
RELATIVI - SERIE TRIGONOMETRICHE -
APPLICAZIONI GEOMETRICHE



EDIZIONI CREMONESSE

ROMA

INDICE GENERALE

<i>Prefazione</i>	pag. v
-----------------------------	--------

Cap. I. — NOZIONI SULLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

§ 1. <i>Prime questioni di esistenza e di unicità</i>	pag. 1
1. Concetto di equazione differenziale ordinaria	1
2. Questioni di esistenza e di unicità	3
3. Teorema di unicità per l'equazione $y' = f(x, y)$	5
4. Teorema d'esistenza. Approssimazioni successive	5
§ 2. <i>Il metodo di Courchy-Lipschitz e il teorema di Peano</i>	8
5. Il concetto del metodo delle poligonali	8
6. Teorema di Giulio Ascoli	10
7. Teorema di Peano	14
§ 3. <i>Integrali generali e singolari</i>	17
8. Integrali e curve integrali di un'equazione differenziale ordinaria di ordine n	17
9. Seguito: considerazioni sugli integrali singolari	19
10. Un esempio. L'equazione di Clairaut	21
§ 4. <i>Le equazioni lineari normali del primo ordine e le equazioni di Bernoulli e di Riccati</i>	23
11. L'equazione normale lineare omogenea del primo ordine	23
12. Seguito. Il caso dell'equazione non omogenea	25
13. L'equazione di Bernoulli	26
14. L'equazione di Riccati	26
§ 5. <i>Il metodo del fattore integrante e le sue prime conseguenze</i>	28
15. Il fattore integrante	28
16. Seguito. Equazioni a variabili separabili	30
17. Equazioni omogenee nelle x, y	31
§ 6. <i>Alcuni tipi non normali di equazioni del primo ordine</i>	33
18. Equazioni del primo ordine non risolte rispetto a y' ma risolte rispetto a y e ad x	33
19. L'equazione di Bernoulli-D'Alembert	34

Cap. II. — SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI E QUESTIONI COLLEGATE

§ 1. <i>I sistemi normali di equazioni differenziali ordinarie</i>	35
20. Sistemi normali di equazioni del primo ordine	36
21. Teorema di unicità	37

22. Teorema d'esistenza. L'integrale generale	pag. 38
23. Equazioni differenziali di ordine superiore e loro sistemi	41
24. Equazioni del secondo ordine	42
§ 2. Sistemi ed equazioni differenziali lineari	43
25. Sistemi differenziali lineari di equazioni del primo ordine	43
26. Seguito. Sistemi omogenei	44
27. Sistemi non omogenei. Metodo della variazione delle costanti	46
28. Equazioni differenziali lineari normali d'ordine n	47
29. Dipendenza e indipendenza lineare di più funzioni	50
30. Equazioni omogenee a coefficienti costanti	54
§ 3. Gli integrali come funzioni dei valori iniziali	60
31. Lemma di Peano-Gronwall	60
32. Dipendenza continua dai valori iniziali	60
33. Derivabilità rispetto ai valori iniziali	61
§ 4. Complementi ed esercizi	64
1. Estensione del teorema di Ascoli	64
3-8. I teoremi di Carathéodory	66
9. Prolungabilità d'una curva integrale d'un sistema differenziale	70
10-13. Il teorema di Peano per le equazioni differenziali del primo ordine	72
14. Un teorema di esistenza in grande per le equazioni del 1° ordine	75
15. La prolungabilità dell'integrale per le equazioni di certi problemi dinamici	75
16. Un teorema di confronto	76
17. Sugli integrali prossimi ad un integrale dato	76
18. Casi di abbassamento nell'integrazione di sistemi di equazioni differenziali lineari. Estensione del metodo dell'equazione caratteristica	77
19. Inviluppi di sistemi di curve piane. Applicazione alle equazioni d'ordine n	78
20. Il teorema di esistenza (e di unicità) di Cauchy nel caso analitico. Calcolo dei limiti e delle funzioni maggioranti	79
21. Qualche esempio di valori iniziali eccezionali. Punti critici degli integrali	84
22. Il metodo del passaggio dal reale al complesso	86
23. Formula integrale elementare di tipo Cauchy per le funzioni analitiche di più variabili	88
24. Moderne estensioni della formula di Cauchy	91
25. Le funzioni analitiche di più variabili come funzioni algebroidi. Concetto generale di folla analitica	93
26. Il metodo delle approssimazioni successive nel campo complesso. Dipendenza dai valori iniziali	97
27. Il metodo di Cauchy-Lipschitz nel campo complesso	99

28. Singolarità dei coefficienti e degli integrali di un sistema di equazioni normali del 1° ordine	pag. 100
29. Cenni sulle singolarità degli integrali di equazioni non normali	» 103
30. Cenni sugli integrali abeliani relativi ad una varietà algebrica	» 104
31. Integrali asintotici di certi sistemi differenziali, nel campo reale	» 105
32. Cenni sugli sviluppi asintotici degli integrali di un'equazione differenziale del 2° ordine nel campo reale	» 107
33. Le equazioni differenziali lineari nel campo analitico	» 107
34. Analogie tra equazioni differenziali lineari omogenee ed equazioni algebriche	» 109
35. Comportamento degli integrali delle equazioni lineari omogenee nel campo analitico. Il teorema di Poincaré	» 111
36. Singolarità inerenti ad un'equazione differenziale nel campo analitico reale	» 116
37. La trasformazione di Laplace e alcune sue applicazioni	» 118
38. Moltiplicatori per un'equazione o per un sistema normale di equazioni del 1° ordine. Teorema dell'ultimo moltiplicatore di Jacobi	» 119
39. I moltiplicatori di Jacobi come fattori integranti di una forma differenziale di grado superiore	» 123
40. Integrali stabili e instabili	» 126
41. Equazione lineare ed omogenea di Eulero	» 127
42. Equazione differenziale ipergeometrica	» 128

Cap. III. — PROBLEMI IN GRANDE
PER LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

1. <i>Preliminari</i>	» 130
34. <i>Lessoni di Birkhoff e Kellogg</i>	» 130
35. Teorema d'esistenza degli zeri di un sistema algebrico	» 133
36. Teorema d'esistenza degli zeri delle funzioni continue	» 134
37. Il teorema di Brouwer sui punti uniti delle trasformazioni continue	» 136
2. <i>Un primo tipo di problemi al contorno</i>	» 137
38. Posizione del problema	» 137
39. Preliminari ad una trasformazione del problema	» 138
40. Trasformazione del problema	» 139
41. Soluzione del problema	» 140
42. Accenni su più amplii problemi al contorno	» 143
43. Teorema di unicità per un problema al contorno inerente ad un'equazione del 2° ordine	» 147
3. <i>I problemi al contorno di Sturm-Liouville</i>	» 149
44. Il teorema dell'alternativa	» 149
45. I problemi di Sturm-Liouville	» 150

46. Premesse circa talune ovvie proprietà delle equazioni lineari omogenee di 2° ordine	pag. 151
47. Ulteriore premessa sopra un'espressione dell'integrale generale della (11).	» 152
48. Forma autoaggiunta di un'equazione lineare omogenea del 2° ordine	» 153
49. L'identità di Pleome	» 154
50. I teoremi di Sturm: il teorema di confronto e il teorema di separazione	» 155
51. Seguito dei teoremi di Sturm: il teorema di oscillazione	» 156
52. Esistenza di autovalori	» 158
53. Qualche proprietà degli autovalori	» 159
54. Identità di Lagrange, Relazioni di ortogonalità	» 160
§ 4. <i>Complementi ed esercizi</i>	» 161
1. Il teorema di Weierstrass per le funzioni di più variabili	» 162
2. Sui problemi al contorno	» 163
3. Nozioni sui problemi al contorno lineari di tipo generale	» 164
4. Il problema aggiunto di un dato problema al contorno	» 164
5. Problemi autoaggiunti	» 165
6. Le funzioni di Green per espressioni differenziali del 2° ordine	» 166
7. Funzioni di Green per espressioni differenziali d'ordine n	» 166
8. Traduzione in un'equazione integrale di problemi lineari al contorno, dipendenti da un parametro	» 168
9. Complemento ai nn. 43, 46	» 168
10. Un teorema di confronto di Fubini ed estensione del medesimo	» 169
11. Cenni di ulteriori estensioni	» 169
12. Ortogonalità delle autofunzioni del problema di Sturm-Liouville e di altri problemi al contorno	» 170
13. Valutazioni asintotiche	» 171
14. Altri tipi di problemi al contorno	» 173

Cap. IV. — SERIE TRIGONOMETRICHE

§ 1. <i>Generalità sulle serie trigonometriche e prime proprietà delle serie di Fourier</i>	» 175
45. Preliminari	» 175
56. Coefficienti di Eulero-Fourier di una funzione continua	» 177
57. Primi teoremi sulla successione dei seni e coseni dei multipli di π	» 178
58. Proprietà dei coefficienti di Eulero-Fourier	» 180
59. La disuguaglianza di Bessel e la formula di Parseval	» 182
60. Criteri elementari di convergenza per una serie di Fourier	» 184
61. Le serie di Fourier in un intervallo qualunque. Serie di seni e di coseni	» 185
§ 2. <i>Le serie di Fourier ed i procedimenti generalizzati di sommazione</i>	» 185
62. Gli integrali di Dirichlet e di Fejér	» 185
63. Il teorema di Fejér	» 189

64. Corollari	pag. 191
65. Un teorema di Frobenius	» 191
66. Sommabilità secondo Abel delle serie di Fourier. Integrale di Poisson	» 193
67. Le funzioni a variazione limitata e le loro serie di Fourier	» 195
§ 3. <i>Cenni sulle applicazioni delle serie di Fourier alle equazioni alle derivate parziali</i>	» 198
68. Un problema relativo all'equazione delle corde vibranti	» 198
69. Il problema di Dirichlet in un caso particolare	» 200
§ 4. <i>Complementi ed esercizi</i>	» 201
1-3. Esempi	» 201
4. Unità dello sviluppo in serie trigonometrica	» 201
5. Sulle serie di Fourier di una funzione continua	» 203
6. Il fenomeno di Gibbs	» 203
7. Ancora sull'ordine di grandezza dei coefficienti di Fourier	» 203
8. Un teorema di Riemann	» 204
9. L'integrale di Fourier	» 204
10-18. Serie di funzioni ortogonali	» 206
19-20. Cenni sugli spazi hilbertiani	» 210
21. Notizie sugli sviluppi in serie di autofunzioni	» 213

Cap. V. — APPLICAZIONI GEOMETRICHE

§ 1. <i>Alcune proprietà differenziali delle superficie</i>	» 214
70. La prima forma quadratica fondamentale d'una superficie nella geometria differenziale classica	» 214
71. La seconda forma quadratica fondamentale	» 218
72. Superficie involuppo	» 221
73. Superficie sviluppabili	» 224
74. Linee di curvatura	» 227
§ 2. <i>Complementi ed esercizi</i>	» 231
1. Alcuni esercizi elementari sulle equazioni differenziali	» 231
2. Significato geometrico del rapporto delle due forme fondamentali. Teoremi di Meusnier e di Eulero	» 232
3. Indicatrici di Dupin	» 233
4. Traiettorie ortogonali di un sistema di linee sopra una superficie	» 235
5. Aspetto vettoriale della prima forma fondamentale d'una superficie	» 235
6. Cenni sui sistemi isotermi	» 236
7. Cenni sulla geometria differenziale delle rigate	» 237
8. Equazione differenziale delle coniche	» 238
9. Cenni storici sulla geometria differenziale iperspaziale e sulla geometria proiettivo-differenziale	» 239
<i>Indice degli autori</i>	» 245
<i>Indice analitico delle materie</i>	» 248