

S. Salsa

# Equazioni a derivate parziali

Metodi, modelli e applicazioni



Springer

# Indice

<b>1. Introduzione</b> .....	<b>1</b>
1. Modelli matematici.....	1
2. Equazioni a derivate parziali.....	2
3. Problemi ben posti.....	6
<b>2. Diffusione</b> .....	<b>9</b>
1. L'equazione di diffusione.....	9
1.1. Introduzione.....	9
1.2. Derivazione dell'equazione del calore.....	10
1.3. Problemi ben posti ( $n=1$ ).....	12
1.4. Un esempio elementare.....	14
1.5. Problemi in dimensione $n>1$ .....	20
2. Questioni di unicità.....	22
2.1. Unicità per i problemi di C-Dirichlet, C-Neumann, C-Robin, misto.....	22
2.2. Il principio di massimo.....	24
3. La soluzione fondamentale.....	26
3.1. Trasformazioni invarianti.....	26
3.2. Soluzione fondamentale ( $n=1$ ).....	27
3.3. La distribuzione di Dirac.....	30
3.4. Soluzione fondamentale ( $n>1$ ).....	32
4. Passeggiata aleatoria simmetrica ( $n=1$ ).....	33
4.1. Calcoli preliminari.....	33
4.2. Dalla passeggiata al moto Browniano.....	36
5. Diffusione, trasporto e reazione.....	42
5.1. Passeggiata aleatoria con deriva (drift).....	42
5.2. Inquinante in un fiume.....	43
5.3. Passeggiata aleatoria con deriva e reazione.....	46
6. Passeggiata simmetrica multidimensionale.....	47
7. Un esempio di diffusione e reazione ( $n=3$ ).....	50
8. Il problema di Cauchy globale ( $n=1$ ).....	54
8.1. Il caso omogeneo.....	54
8.2. Esistenza della soluzione.....	56

8.3.	Il caso non omogeneo. Metodo di Duhamel .....	57
8.4.	Unicità della soluzione. Un principio di massimo .....	61
9.	Un'applicazione alla finanza matematica .....	62
9.1.	Un modello di evoluzione per il prezzo .....	63
9.2.	L'equazione di Black-Scholes .....	66
9.3.	Le soluzioni .....	69
9.4.	Strategia di copertura (self-financing strategy) .....	72
<b>3.</b>	<b>Equazione di Laplace</b> .....	<b>75</b>
1.	Introduzione .....	75
2.	Problemi ben posti. Unicità .....	76
3.	Funzioni armoniche .....	78
3.1.	Funzioni armoniche nel discreto .....	78
3.2.	Proprietà di media .....	80
3.3.	Principi di massimo .....	82
3.4.	Formula di Poisson .....	85
3.5.	Disuguaglianza di Harnack e teorema di Liouville .....	90
3.6.	Una soluzione probabilistica per il problema di Dirichlet .....	91
3.7.	Ricorrenza e moto browniano .....	95
4.	Potenziali .....	96
4.1.	Soluzione fondamentale e funzione di Green .....	96
4.2.	Potenziali (domini limitati) .....	98
4.3.	Formule di rappresentazione di Green .....	106
4.4.	Problemi in domini illimitati .....	108
<b>4.</b>	<b>Leggi di conservazione ed equazioni del prim'ordine</b> .....	<b>113</b>
1.	Leggi di conservazione .....	113
2.	Equazione lineare del trasporto .....	114
2.1.	Inquinante in un fiume .....	114
2.2.	Sorgente distribuita .....	115
2.3.	Trasporto ed estinzione .....	116
2.4.	Sorgente localizzata .....	117
2.5.	Problemi con valori al bordo .....	118
3.	Traffico su strada .....	120
3.1.	Un modello di traffico .....	120
3.2.	Il metodo delle caratteristiche .....	121
3.3.	Traffico al semaforo .....	124
3.4.	Traffico crescente con $x$ .....	125
4.	Soluzioni integrali .....	129
4.1.	Riesame del metodo delle caratteristiche .....	129
4.2.	Definizione di soluzione integrale .....	130
4.3.	Condizione di Rankine-Hugoniot .....	132
4.4.	Due esempi .....	133
4.5.	La condizione di entropia .....	136
5.	Caratteristiche per equazioni quasilineari .....	141
5.1.	Equazioni quasilineari .....	141

5.2. Problema di Cauchy.....	143
5.3. Il metodo degli integrali primi.....	150
5.4. Moto di fluidi in mezzi porosi.....	152
6. <b>Equazioni</b> generali del prim'ordine.....	155
6.1. Striscie caratteristiche.....	155
6.2. Esistenza ed unicità per il Problema di Cauchy.....	158
6.3. Ottica geometrica.....	160
<b>5. Onde e vibrazioni.....</b>	<b>163</b>
1. Che cos'è un'onda?.....	163
1.1. Tipi di onde.....	164
1.2. Velocità di gruppo e relazione di dispersione.....	165
1.3. Onde piane e localmente piane.....	168
2. Onde trasversali in una corda.....	169
2.1. Derivazione del modello.....	169
2.2. Energia.....	171
3. L'equazione delle onde unidimensionale.....	173
3.1. Condizioni iniziali e al bordo.....	173
3.2. Un esempio.....	174
4. La formula di d'Alembert.....	179
4.1. L'equazione omogenea.....	179
4.2. Domini di dipendenza, di influenza. Soluzione fondamentale.....	182
4.3. Effetti di dispersione e dissipazione.....	186
5. <b>Equazioni</b> lineari del secondo ordine.....	189
5.1. Classificazione.....	189
5.2. Caratteristiche.....	191
6. Equazione delle onde ( $n > 1$ ).....	196
6.1. Soluzioni speciali.....	196
6.2. Problemi ben posti. Unicità.....	198
7. <b>Due modelli</b> .....	200
7.1. Piccole vibrazioni di una membrana elastica.....	200
7.2. Onde sonore nei gas.....	203
8. Il Problema di Cauchy.....	207
8.1. Equazione omogenea e soluzione fondamentale in dimensione 3.....	207
8.2. Formula di Kirchhoff e principio di Huygens.....	209
8.3. Il problema di Cauchy in dimensione 2.....	213
8.4. Equazione non omogenea. Potenziali ritardati.....	214
9. Onde d'acqua lineari.....	216
9.1. Derivazione del modello.....	216
9.2. Adimensionalizzazione e linearizzazione.....	220
9.3. Onde in acqua profonda.....	221
9.4. Interpretazione della soluzione.....	223
<b>6. Elementi di Analisi Funzionale.....</b>	<b>225</b>
1. Spazi di Hilbert.....	225
1.1. Norme e spazi di Banach.....	225

1.2. Prodotto interno e spazi di Hilbert .....	228
2. Ortogonalità e proiezioni .....	231
2.1. Basi ortonormali .....	236
3. Operatori lineari. Spazio duale .....	238
3.1. Operatori lineari .....	238
3.2. Duale .....	240
3.3. Teorema di rappresentazione di Riesz .....	242
3.4. Aggiunto di un operatore .....	244
4. Problemi variazionali astratti .....	246
4.1. Forme bilineari .....	246
4.2. Teorema di Lax-Milgram .....	247
4.3. Forme bilineari simmetriche ed equazione di Eulero .....	250
4.4. Approssimazione e metodo di Galerkin .....	251
4.5. Una variante del teorema di Lax-Milgram .....	254
5. Compattezza e convergenza debole .....	256
5.1. Compattezza .....	256
5.2. Convergenza debole .....	258
5.3. Operatori compatti .....	261
6. Teorema dell'alternativa di Fredholm .....	264
6.1. Un esempio preliminare .....	264
6.2. Il teorema dell'alternativa .....	266
6.3. Alternativa per problemi variazionali astratti .....	267
<b>7. Distribuzioni .....</b>	<b>269</b>
1. Distribuzioni e funzioni .....	269
1.1. Introduzione .....	269
1.2. Uno spazio di funzioni test .....	270
1.3. Le distribuzioni .....	274
2. <b>Derivate</b> .....	279
2.1. Definizione di derivata .....	279
2.2. Gradiente, divergenza, rotore, Laplaciano .....	281
2.3. Alcune proprietà .....	284
3. Moltiplicazione, composizione, divisione .....	285
3.1. Moltiplicazione. Regola di Leibniz .....	285
3.2. Composizione .....	287
3.3. Divisione .....	289
3.4. Integrazione .....	291
3.5. Convolutione .....	293
4. Trasformata di Fourier .....	294
4.1. Distribuzioni temperate .....	294
4.2. Trasformata di Fourier .....	297
4.3. Proprietà della trasformata .....	299
4.4. Trasformata del pettine di Dirac e formula di Poisson .....	302
4.5. Trasformata di Fourier in $L'$ .....	303
<b>8. Spazi di Sobolev .....</b>	<b>305</b>
1. Una costruzione astratta .....	305

2. Gli spazi $H^1$ e $H_0^1$ .....	307
2.1. Lo spazio $H^1$ .....	307
2.2. Lo spazio $H_0^1(\Omega)$ .....	310
3. Duale di $H_0^1(\Omega)$ .....	311
4. Altri spazi di Sobolev.....	313
4.1. Gli spazi $H^m$ , $m > 1$ .....	313
4.2. Lo spazio $H_{div}(\Omega)$ .....	314
5. Regole di calcolo. Approssimazioni.....	315
5.1. Regole di calcolo.....	315
5.2. Approssimazioni locali con funzioni regolari.....	315
5.3. Estensioni ed approssimazioni globali.....	316
6. Tracce.....	319
6.1. Tracce di funzioni in $H^1$ .....	319
6.2. Tracce di funzioni in $H^m$ .....	322
6.3. Spazi di tracce.....	323
6.4. Gli spazi $H_0^1(\Omega)$ , $H_{0,\Gamma}^1(\Omega)$ e $H_0^2(\Omega)$ .....	324
7. Trasformata di Fourier e spazi di Sobolev.....	325
8. Teorema di Rellich e disuguaglianze di Poincaré.....	326
8.1. Teorema di Rellich.....	326
8.2. Disuguaglianze di Poincaré.....	326
9. Teoremi di immersione di Sobolev.....	328
9.1. Disuguaglianze di Sobolev in $\mathbb{R}^n$ .....	328
9.2. Domini limitati.....	329
10. Spazi dipendenti dal tempo.....	331
10.1. Funzioni a valori in spazi di Hilbert.....	331
10.2. Spazi dipendenti dal tempo.....	332
<b>9. Formulazione variazionale di problemi ellittici.....</b>	<b>335</b>
1. Equazioni ellittiche.....	335
2. Il problema di Poisson.....	337
3. Diffusione, trasporto e reazione ( $n=1$ ).....	339
3.1. Il problema.....	339
3.2. Condizioni di Dirichlet.....	339
3.3. Condizioni di Neumann.....	344
3.4. Condizioni miste e di Robin.....	346
4. Formulazione variazionale del problema di Poisson.....	348
4.1. Condizioni di Dirichlet (omogenee).....	348
4.2. Problema di Neumann.....	351
4.3. Problemi misto e di Robin.....	354
4.4. Il metodo di separazione delle variabili rivisitato.....	355
4.5. Un risultato di stabilità asintotica.....	357
5. Equazioni generali in forma di divergenza.....	359
5.1. Problema di Dirichlet.....	360
5.2. Problema di Neumann.....	365
5.3. Problema misto.....	367
5.4. Problema di Robin.....	368

5.5. Principi di massimo .....	370
6. Questioni di regolarità.....	372
7. Equilibrio di una piastra.....	377
<b>10. Formulazione debole di problemi di evoluzione .....</b>	<b>381</b>
1. <b>Equazioni</b> paraboliche.....	381
2. Equazione del calore .....	382
2.1. Il problema di Cauchy-Dirichlet.....	382
2.2. Il metodo di Faedo-Galerkin.....	385
2.3. Soluzione del problema approssimato.....	386
2.4. Stime dell'energia.....	387
2.5. Esistenza, unicità e stabilità.....	390
3. Problemi di Neumann, misto, di Robin .....	393
4. Disuguaglianza di Gronwall .....	395
5. <b>Equazioni</b> generali .....	396
5.1. Formulazione debole.....	396
5.2. Il metodo di Faedo-Galerkin.....	399
6. <b>Equazioni</b> iperboliche.....	400
7. Equazione delle onde.....	401
7.1. Il problema di Cauchy-Dirichlet.....	401
7.2. Il metodo di Faedo-Galerkin.....	403
7.3. Soluzione del problema approssimato.....	405
7.4. Stime dell'energia.....	406
7.5. Esistenza, unicità e stabilità.....	408
<b>Appendice A. Misura ed Integrale di Lebesgue.....</b>	<b>409</b>
1. Un problema di ... conteggio .....	409
2. Misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$ . Funzioni misurabili.....	411
3. L'integrale di Lebesgue.....	413
4. Alcuni teoremi fondamentali .....	414
<b>Appendice B. Identità e formule .....</b>	<b>415</b>
1. Gradiente, divergenza, rotore, laplaciano .....	415
2. Formule .....	417
<b>Bibliografia.....</b>	<b>419</b>
<b>Indice analitico.....</b>	<b>421</b>