

FRANCESCO SEVERI

GEOMETRIA

DEI SISTEMI ALGEBRICI SOPRA UNA SUPERFICIE E SOPRA UNA VARIETÀ ALGEBRICA

*VOLUME SECONDO IN CONTINUAZIONE DEL
VOLUME PRIMO DELLO STESSO AUTORE
CHE PORTA IL TITOLO :*

**SERIE, SISTEMI D'EQUIVALENZA E CORRISPONDENZE
ALGEBRICHE SULLE VARIETÀ ALGEBRICHE**



EDIZIONI CREMONESE
ROMA

INDICE

PREFAZIONE	Pag. 81
----------------------	---------

CAPITOLO I

Sistemi algebrici di curve sopra una superficie

§ 1. Sistemi algebrici di curve piane	1
1. Premesse sulle folde analitiche. Ordine d'una folds	1
2. Folde parametricamente rappresentabili. Caratterizzazione delle folde lineari	3
3. Ulteriori proprietà delle folde lineari. Intersezioni di folde lineari	6
4. Proprietà della corrispondenza fra una folds lineare e l'interno di un punto d'uno spazio lineare dove la folds si rappresenta regolarmente	8
5. Alcune premesse sui rami analitici. Caratterizzazione della linearità d'un ramo in coordinate omogenee	10
6. Rappresentazione dell'insieme delle curve piane d'ordine m in uno spazio S_m . Varietà delle curve con d punti doppi	12
7. Approfondimento della struttura della varietà delle curve piane di ordine m con d nodi. Teoremi di unicità e di esistenza	19
8. Il principio di spezzamento	22
9. Condizione caratteristica perchè una curva spezzata possa esser limite di una irriducibile	25
10. Rami acutistici (sistemi co^1) di curve algebriche piane	30
11. Gruppo caratteristico d'un ramo analitico di curve algebriche piane e sistemi lineari osculatori al ramo nell'origine	32
12. L'ordine di un ramo analitico di curve algebriche piane come indice in piccolo del ramo	34
13. Il sistema lineare delle curve infinitamente vicine all'origine in una folds lineare più volte infinita di curve algebriche piane e la serie caratteristica sulla curva origine	35
14. I gruppi caratteristici sulle curve origini di folde superlineari. Folde quasi lineari	37
15. L'ordine di una folds analitica co^k di curve piane come indice in piccolo	42
§ 2. Digressione sui sistemi algebrici di varietà. Prime proprietà dei sistemi di curve sopra una superficie	43

16. I sistemi algebrici di varietà algebriche d'uno spazio lineare	Pag. 43
17. Sistemi algebrici completi di curve algebriche sopra una superficie. Le loro serie caratteristiche	» 48
18. I sistemi completi di curve d'una superficie rappresentati sopra un piano multiplo	» 53
19. Immagine sul piano multiplo della serie caratteristica d'una curva della superficie	» 59

CAPITOLO II

Teoremi fondamentali sui sistemi continui

§ 1. Il teorema della serie caratteristica	» 62
20. Proprietà preliminari	» 62
21. Proprietà d'un sistema lineare di curve sopra una superficie, considerate come differenza di due sistemi regolari. Curve irregolari	» 68
22. Il teorema fondamentale per le superficie regolari e per le superficie irregolari di genere geometrico nullo	» 75
23. Il principio di spezzamento sopra una superficie di genere geometrico $pg > 0$	» 78
24. Il teorema fondamentale di esistenza, unicità e completezza per le curve irregolari non speciali	» 88
25. Estensione del teorema a tutte le curve irregolari, anche speciali	» 90
26. Estensione del teorema alle curve irriducibili con nodi	» 95
27. Maggiore determinazione del teorema fondamentale	» 99
28. Paradossi istruttivi	» 101
29. Osservazione sul principio di spezzamento nei riguardi delle curve irregolari speciali	» 107
30. Il teorema di esistenza e di unicità per tutte le curve aritmeticamente effettive	» 107
31. Sistemi lineari esuberanti e sistemi lineari eschitanti. Esempi	» 113
32. Sistemi irriducibili completi anomali. Esempi	» 118
33. Valore delle ipotesi del teorema fondamentale. Esempi di eccezioni quando queste ipotesi non si verificano	» 125
34. Il teorema di unicità per sistemi continui completi di sistemi lineari sopra una varietà algebrica. Irregolarità superficiale d'una varietà	» 131

CAPITOLO III

Questioni collegate col sistema fondamentale

§ 1. Irregolarità dell'aggiunto e sue conseguenze	» 136
35. La regolarità del sistema aggiunto ad una curva generica	» 136
36. Condizione geometrica necessaria e sufficiente perchè una curva virtuale equivalga linearmente o algebricamente ad una curva effettiva	» 150

37. Maggior determinazione del teorema di Riemann-Roch sopra una superficie	Pag. 155
38. Alcune proprietà dei sistemi canonici e plurisecanti	* 161
§ 2. La varietà di <i>Picard</i>	* 164
39. La varietà di <i>Picard</i> associata ad una superficie (irregolare)	* 164
40. Estensione ai sistemi continui di ipersuperficie sopra una M_F	* 169
41. Esistenza, sulla varietà di <i>Picard</i> d'una superficie, di una trasformata razionale di questa	* 171
§ 3. Un nuovo invariante	* 177
42. Costruzione d'un nuovo invariante di una superficie	* 177
43. Alcune identità algebriche notevoli, concernenti una superficie dello spazio ordinario	* 179
44. Ulteriori proprietà delle curve covarianti di un fascio. La serie d'irregolarità	* 187
§ 4. Note storico bibliografiche e riflessioni critiche relative ai precedenti capitoli	* 191
45.	* 191

CAPITOLO IV

La topologia delle superficie e varietà algebriche

§ 1. Generalità	* 203
46. Riemanniane e in particolare riemanniane algebriche	* 203
47. Celle, semplici e loro orientamenti	* 205
48. Reticolazione d'una riemanniana	* 207
49. Complessi semplici e multipli. Cicli semplici e multipli. Omologie, isotopia e omotopia	* 209
50. Divisori dello zero. Pseudomologie	* 212
51. Teorema fondamentale. Numeri di <i>Betti</i> . Coefficienti di torsione	* 213
52. Intersezioni orientate. Indice di <i>Kronecker</i>	* 216

CAPITOLO V

La teoria della base sulle superficie e sulle varietà algebriche

§ 1. La nozione generale d'equivalenza algebrica	* 219
53. Varietà totali di un sistema algebrico	* 219
54. Significato infinitesimale (o dinamico) delle molteplicità delle componenti d'una varietà totale	* 221
55. Equivalenza algebrica sopra una varietà. Proprietà trasitiva dell'equivalenza	* 223
56. Estensione alle varietà virtuali. Lo zero dell'uguaglianza e della equivalenza algebrica. Divisori dello zero	* 226

§ 2. La nozione generale di equivalenza razionale	Pag. 228
57. Equivalenza razionale in senso lato e in senso stretto	» 228
58. La zero dell'equivalenza razionale e quella dell'equivalenza lineare. Divisori della zero	» 230
§ 3. La teoria della base delle curve tracciate sopra una superficie	» 234
59. Criterio numerativo fondamentale di pseudoequivalenza algebrica	» 234
60. Curve algebricamente dipendenti (e indipendenti) su P	» 237
61. Alcuni complementi ai risultati precedenti	» 240
62. Gli ℓ -gruppi abeliani di curve tracciate sulla superficie	» 245
63. Le tre specie di ℓ -gruppi abeliani di curve virtuali della superficie	» 248
64. Il carattere σ della divisione sopra una superficie algebrica	» 254
65. Condizione per l'univocità della divisione	» 256
66. Esempi di superficie con $\sigma = 1$	» 257
67. Esempi di superficie con $\sigma > 1$	» 260
68. Teorema fondamentale. Esistenza della base per la totalità delle curve d'una superficie	» 263
69. Invarianza relativa del numero base	» 265
70. Le basi intermedie	» 267
71. La base del gruppo della divisione algebrica sopra una superficie. Base minima	» 269
72. Una prima applicazione. La superficie con un gruppo discontinuo di trasformazioni birazionali	» 270
73. Seguito. Il gruppo infinito discontinuo degli automorfismi birazionali appartenenti ad una certa superficie del 4° ordine	» 274
74. Seguito. Altri esempi di superficie del 4° ordine con gruppi discontinui infiniti di automorfismi birazionali	» 279
75. Un altro tipo di applicazioni della teoria della base: caratterizzazione topologica di alcune superficie	» 280
§ 4. La teoria della base sopra una varietà algebrica	» 291
76. La base delle varietà (pure) di data dimensione entro uno spazio li- neari	» 291
77. La base per le ipersuperficie sopra una varietà algebrica irriducibile	» 294
78. Equivalenza numerativa tra varietà. La base per le varietà virtuali (pure) di dimensione qualunque dal punto di vista di quest'equivalenza	» 298
79. Il problema della base rispetto all'equivalenza algebrica per varietà virtuali (pure) di dimensione qualunque	» 302
80. Considerazioni sopra una via puramente algebrica per risolvere il pro- blema della base concernente le ipersuperficie d'una varietà. Legami fra la teoria della base e la teoria delle classi d'ideali in un corpo di nu- meri algebrici	» 305
§ 5. Note e riflessioni storico-critiche sulla materia del cap. V	» 310
81.	» 310

CAPITOLO VI

Gli integrali semplici sopra una superficie

§ 1. <i>Premesse fondamentali</i>	Pag. 319
82. Richiami sugli integrali di differenziali esatti nel campo reale	319
83. Integrali di differenziali esatti nel campo complesso	321
84. Le forme differenziali di grado qualunque e il teorema di Stokes-Green nel campo complesso	324
85. Integrali di forme differenziali lineari sopra una superficie algebrica	327
86. Integrali lungo cammini infiniti	330
87. Invarianza di fronte alle trasformazioni birazionali degli integrali di forme differenziali lineari	331
§ 2. <i>Forme differenziali lineari integrabili e integrali relativi</i>	333
88. Condizione d'integrabilità per una forma differenziale lineare sopra una superficie e integrali semplici relativi	333
89. Residui d'un integrale semplice	337
90. Integrali semplici di 1°, 2°, 3° specie. Loro polidromie	340
91. Comportamento d'un integrale semplice nell'intorno di un punto al finito della superficie	344
92. Comportamento d'un integrale semplice nell'intorno d'un punto all'infinito	347
93. Singularità d'un integrale in corrispondenza alle singularità della forma integranda	352
§ 3. <i>Prime proprietà degli integrali semplici di 1° specie</i>	357
94. Forma necessaria per gli integrali di 1° specie	357
95. Espressione della condizione d'integrabilità per gli integrali semplici di 1° specie	360
96. Espressioni simmetriche d'un integrale semplice di 1° specie in coordinate non omogenee ed in coordinate omogenee	364
97. Esempi di superficie che non possiedono integrali semplici di 1° specie	369
98. Un primo esempio di superficie dotata d'integrali semplici trascendenti di 1° e di 2° specie (rigate e superficie con un fascio irrazionale)	373
99. La superficie prodotto di due curve	377
100. La superficie delle coppie di punti di una curva	378
101. Caratterizzazione geometrica della superficie possedenti integrali semplici funzionalmente dipendenti	382
§ 4. <i>I cicli lineari d'una superficie in relazione coi cicli lineari d'una sua curva</i>	384
102. Cicli lineari d'una curva variabile in un fascio sopra una superficie	384
103. Modelli di riemanniani adatti allo scopo da conseguire	386
104. L'omologia di Picard-Lefschetz	388
105. Cicli evanescenti. Teorema conclusivo	392
106. Cicli evanescenti sopra una qualunque curva $C(\lambda_0)$	395

107. Il gruppo G di sostituzioni sopra i sistemi fondamentali di cicli di una curva variabile in un fascio	Pag. 394
108. Proprietà dei cicli evanescenti	396
109. Cicli invarianti e loro caratterizzazione	398
110. Riduzione dei cicli lineari d'una superficie ai cicli d'una sua curva	398
111.	402
112. Costruzione d'un sistema di cicli invarianti sopra una curva della superficie	404
113.	406
114. Esempio: Cicli invarianti sul prodotto di due curve	408
115. Costruzione d'una base dei cicli lineari d'una curva della superficie mediante cicli invarianti e cicli evanescenti	409
116. Parità dell'ordine di connessione lineare (e tridimensionale) d'una superficie F	412
117. Ipo-cicli. Basal intermedie dei cicli invarianti e degli ipo-cicli	413
[5. <i>Gli integrali semplici di 2ª specie e il loro numero</i>	
118. Un lemma sulla costruzione razionale degli integrali abeliani di 2ª specie sopra una curva	416
119. Seguito	420
120. Sistema fondamentale d'integrali abeliani di 2ª specie razionalmente fissati sopra le sezioni di una superficie con un fascio di piani	424
121. Sistema fondamentale d'integrali abeliani di 1ª specie razionalmente fissati sopra le sezioni d'una superficie con un fascio di piani	426
122. Una prima proprietà dei periodi degli integrali abeliani di 2ª specie razionalmente fissati sopra le sezioni d'una superficie con un fascio di piani	430
123. Il gruppo G di sostituzioni sopra i cicli di una curva variabile in un fascio, in relazione ai cicli lineari della superficie	433
124. Costruzione d'un integrale abeliano di 2ª specie a periodi costanti razionalmente individuato sulle sezioni piane d'un fascio	436
125. Il teorema fondamentale di Picard sul numero degli integrali semplici di 2ª specie appartenenti ad una superficie	440
126. Dimostrazione trascendente del teorema di Lefschetz enunciato nel n. 115	444
127. Il teorema fondamentale circa il legame fra irregolarità d'una superficie e l'esistenza ivi d'integrali semplici trascendenti di 2ª (o di 1ª) specie	446
128. Richiami sopra le equazioni differenziali lineari omogenee nel campo analitico	447
129. L'equazione differenziale di Fuchs-Picard	452
130. Osservazioni sul significato di logami lineari omogenei a coefficienti costanti fra i periodi	455
ERRATA-CORRIGE	457