

Mariano Giaquinta
Giuseppe Modica

ANALISI MATEMATICA

3. *Strutture lineari e metriche, continuità*

Indice

Parte I. Strutture Lineari

I.	$\mathbb{K}^n$ e Sistemi Lineari	1
1	Lo spazio $\mathbb{R}^n$	1
	Dimensione di un sottospazio	6
2	Matrici e sistemi lineari	8
2.1	Matrici	8
	Formula del rango	10
2.2	Sistemi lineari e dipendenza lineare	11
2.3	Il metodo di eliminazione di Gauss	13
	Risoluzione dei sistemi con matrice a scala	15
	Risoluzione dei sistemi lineari non omogenei	17
2.4	Sottospazi di $\mathbb{K}^n$	18
	Equazioni implicite e parametriche di un sottospazio ...	18
	Spazi supplementari	20
3	Il calcolo delle matrici	21
3.1	L'algebra delle matrici	23
	Prodotto tra matrici	23
3.2	Prodotto di matrici e applicazioni lineari $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$	23
3.3	Matrici notevoli	24
	Matrice inversa	25
	Il calcolo della matrice inversa	25
	Matrice trasposta	26
4	Determinanti	27
4.1	Matrici 2×2	27
	Determinante e area in $\mathbb{R}^2$	28
4.2	Determinante	29
	Alternanza	31
	Il calcolo dei determinanti	31
4.3	La formula di Cramer	32
	Il calcolo della matrice inversa	33
4.4	La caratteristica di una matrice	33
4.5	Ancora sui sistemi lineari	34
5	Esercizi	35

II.	Spazi Vettoriali	39
1	Spazi vettoriali	39
1.1	Spazi vettoriali: definizioni e fatti elementari	39
	Combinazioni lineari e generatori	40
	Vettori linearmente indipendenti e basi	41
1.2	Basi e coordinate	42
	Spazi vettoriali di dimensione finita	42
	Spazi vettoriali di dimensione infinita	43
1.3	Spazi supplementari	44
2	Applicazioni lineari	45
2.1	Definizioni	45
	Immagine e nucleo	46
2.2	Matrice associata ad una applicazione lineare	47
2.3	Equazioni lineari	48
2.4	Lo spazio $\mathcal{L}(X, Y)$ e l'algebra $\text{End}(X)$	48
3	Cambiamenti di coordinate	51
3.1	Cambiamento di coordinate in uno spazio vettoriale	51
3.2	Cambiamenti di coordinate e applicazioni lineari	52
4	Dualità	53
	Lo spazio duale $\mathcal{L}(X, K)$	53
	Biduale	53
4.1	Cambiamenti di coordinate nel duale	54
5	Esercizi	55
III.	Struttura Euclidea e Struttura Hermitiana	57
1	Struttura euclidea	57
1.1	La struttura metrica di $\mathbb{R}^n$	57
	Prodotto scalare	57
	Norma	58
	Distanza	58
1.2	Spazi euclidei	59
	Prodotti scalari	59
	Vettori ortonormali	61
	L'algoritmo di Gram-Schmidt	62
	Prodotto scalare in coordinate	63
	Prodotti scalari e applicazioni lineari	63
	Applicazioni isometriche	66
	Il teorema dell'alternativa	67
	Proiezioni ortogonali	68
2	Struttura hermitiana	69
2.1	Il prodotto hermitiano di $\mathbb{C}^n$	69
2.2	Spazi hermitiani	70
	Prodotti hermitiani	70
	Vettori ortonormali	71
	L'algoritmo di Gram-Schmidt	72

	Prodotto hermitiano in coordinate	72
	Prodotti hermitiani e applicazioni lineari	73
	Applicazioni unitarie	73
	Il teorema dell'alternativa	74
	Proiezioni ortogonali	75
3	Classificazione delle metriche	75
3.1	Forme bilineari	75
3.2	Metriche su spazi vettoriali reali	76
	Il metodo di Gram-Schmidt	79
	Il metodo di Jacobi	80
	Metriche reali	82
3.3	Metriche su spazi vettoriali complessi	83
	Spazi vettoriali reali e complessi	83
	Forme sesquilineari	84
	Metriche hermitiane	85
	Metriche complesse	85
4	Qualche applicazione	86
4.1	Forme quadratiche	86
	Forme quadratiche e metriche	86
	Classificazione delle coniche	89
4.2	Polinomi trigonometrici	91
	Spettro e prodotti	92
	Polinomi trigonometrici e campionamento	93
4.3	La trasformata discreta di Fourier	94
4.4	Minimi quadrati e regressione lineare	96
5	Esercizi	98
IV.	Autovalori e Riduzione a Forma Canonica	101
1	Autovalori e autovettori	102
	Matrici diagonalizzabili	105
	Polinomio caratteristico	106
	Molteplicità algebrica e geometrica	107
2	Decomposizione spettrale per operatori normali	111
2.1	Operatori autoaggiunti	111
	Decomposizione spettrale	111
	Risoluzione spettrale	113
	Decomposizioni spettrali simultanee	114
2.2	Operatori normali su spazi hermitiani	114
2.3	Operatori normali su spazi euclidei	116
3	Qualche applicazione	118
3.1	Forme quadratiche in spazi euclidei e hermitiani	118
3.2	Caratterizzazione variazionale degli autovalori	119
3.3	Operatori positivi	122
	Radice di un operatore	123
	Forma polare di una matrice	124

3.4	Piccole oscillazioni	125
	Un modello finito ispirato dalla meccanica quantistica ..	128
4	Riduzione a forma canonica di una matrice in $\mathbb{C}$	130
4.1	Il teorema di Cayley-Hamilton	130
4.2	Autovettori generalizzati	131
4.3	La forma canonica di Jordan	134
4.4	Classe di similitudine e forma canonica	136
5	Esercizi	137

Parte II. Strutture Metriche e Topologiche

V.	Spazi Metrici e Funzioni Continue	143
1	Spazi metrici	145
1.1	Definizione e primi esempi	145
	Metriche su spazi di funzioni	149
1.2	Continuità e limiti di funzioni	153
	Continuità	153
	Limiti in spazi metrici	154
	Successioni e limiti	155
	Giunzione	156
	Funzioni a valori in $\mathbb{R}^n$ o con dominio $\mathbb{R}^n$	156
	Il calcolo dei limiti	157
	Qualche trasformazione continua	160
2	Topologia degli spazi metrici	164
2.1	Aperti e chiusi	164
	Aperti in uno spazio metrico	164
	Chiusi	167
	Punti interni, esterni, aderenti e di frontiera	168
	Punti di accumulazione	169
	Successioni	170
	Sottoinsiemi e topologia relativa	170
2.2	Spazi topologici	172
2.3	Spazi metrici completi	175
	Completamento di uno spazio metrico	176
	Metriche equivalenti	177
	Il principio degli intervalli incapsulati	178
	Il teorema di Baire	178
3	Esercizi	179
VI.	Compattezza e Connessione	185
1	Compattezza	185
1.1	Spazi compatti	185
	Compattezza per successioni	185
	Compatti in $\mathbb{R}^n$	187

	Ricoprimenti ed ϵ -reti	188
1.2	Funzioni continue e compattezza	190
	Il teorema di Weierstrass	190
	Continuità e compattezza	190
	Continuità della funzione inversa	191
1.3	Funzioni semicontinue e teorema di Weierstrass	191
2	Estensione delle funzioni continue	194
2.1	Funzioni uniformemente continue	194
2.2	Estensione di funzioni uniformemente continue	196
	Funzioni lipschitziane e hölderiane	196
2.3	Il teorema di Tietze	197
3	Connessione	199
3.1	Spazi connessi	199
	Sottoinsiemi connessi	200
	Componenti connesse	200
3.2	Continuità e connessione	201
	Connessione per segmenti in $\mathbb{R}^n$	201
	Connessione per archi	202
	Qualche applicazione	202
4	Esercizi	203
VII.	Curve Continue	205
1	Curve in $\mathbb{R}^n$	205
1.1	Traiettorie e cammini	205
	Il calcolo	209
	Curve equivalenti	210
1.2	Curve regolari	212
	Lunghezza di una curva	213
	Ascissa curvilinea ed equivalenza C^1	220
1.3	Alcune curve celebri	221
	Spirali	221
	Concoide	223
	Cissoide	226
	Curve algebriche	226
	Cicloide	227
	La catenaria	228
2	Curve in spazi metrici	229
2.1	Cammini in spazi metrici	229
	Funzioni a variazione limitata	230
	Cammini	230
	Riparametrizzazioni lipschitziane ed intrinseche	231
2.2	Funzioni reali a variazione limitata	232
	La funzione di Cantor-Vitali	233
3	Esercizi	235

VIII. Una Introduzione al Grado Topologico	237
1 Omotopia	237
1.1 Applicazioni omotope	238
Equivalenza di omotopia	240
Classi di omotopia	241
1.2 Il gruppo fondamentale	242
Il primo gruppo di omotopia	243
Rivestimenti	244
Il gruppo fondamentale di S^1	245
Il gruppo fondamentale della figura otto	246
Il gruppo fondamentale di S^n	247
Il grado per mappe $S^1 \rightarrow S^1$	247
Grado e classi di omotopia	248
Grado e numero di soluzioni	249
Grado e ricoprimenti	250
2 Mappe continue su sfere	251
2.1 Teoremi di estensione	251
2.2 I teoremi di Hopf e Borsuk	252
2.3 Una definizione del grado per applicazioni da S^n in S^n	252
Simpletti in $\mathbb{R}^{n+1}$	252
n -simpletti sferici su S^n	253
Il grado relativo ad una triangolazione	253
Il grado di Brouwer	255
3 Topologia di $\mathbb{R}^n$	256
3.1 Estensione di mappe continue	256
3.2 I teoremi di punto fisso di Brouwer	256
Punti fissi e risolubilità di equazioni in $\mathbb{R}^{n+1}$	257
Punti fissi e campi di vettori	258
3.3 Conseguenze del teorema di Borsuk	260
3.4 Proprietà di separazione	261
4 Esercizi	264

Parte III. Continuità in Dimensione Infinita

IX. Spazi di Funzioni Continue e Spazi di Banach	267
1 Spazi vettoriali normati	267
1.1 Definizioni e fatti di base	267
Norme e prodotti scalari	269
Insiemi convessi	269
Norme equivalenti	270
Serie in spazi normati	270
1.2 Spazi normati di dimensione finita	272
1.3 Qualche esempio	273
Spazi di successioni: ℓ_p , $1 \leq p < \infty$	273

	Spazi di successioni: ℓ_∞	274
	Un esempio di spazio normato non di Banach	275
1.4	Applicazioni lineari continue	276
	Norma di una applicazione lineare	277
	Norma di una matrice quadrata	277
	Forme continue ed iperpiani	278
	Lo spazio delle applicazioni lineari continue	279
	Convergenza puntuale e uniforme per operatori lineari ..	279
	L'algebra $End(X)$	280
2	Spazi di funzioni continue limitate	282
2.1	Spazi di funzioni limitate	282
2.2	Spazi di funzioni continue limitate	283
	Convergenza puntuale e uniforme	284
	Diagramma di convergenza	285
	Convergenza uniforme sui compatti	286
3	Criteri di compattezza	288
3.1	Funzioni equicontinue	288
3.2	Il teorema di Ascoli-Arzelà	289
4	Teoremi di approssimazione	291
4.1	I teoremi di Weierstrass	291
	Polinomi di Bernstein	293
	Funzioni continue periodiche	296
4.2	Prodotti di convoluzione ed approssimazione della δ	298
	Prodotti di convoluzione	298
	Mollicatori	300
	Approssimazioni della δ	302
4.3	Il teorema di Stone-Weierstrass	305
5	Alcuni principi per la risoluzione di equazioni in spazi astratti	307
5.1	Il teorema di punto fisso di Banach	307
	Il teorema di punto fisso	307
	Il metodo di continuità	310
5.2	Il teorema di punto fisso di Caccioppoli-Schauder	310
	Operatori compatti	311
	Il teorema di Caccioppoli-Schauder	313
	Il principio di Leray-Schauder	314
5.3	Sopra e sottosoluzioni	314
	Spazi di Banach ordinati	315
	Punti fissi via sopra e sottosoluzioni	316
6	Esercizi	316
X.	Spazi di Hilbert	319
1	Spazi di Hilbert	319
1.1	Definizioni, esempi e fatti elementari	319
	Ortogonalità	322
	Sistemi completi	322

1.2	Spazi di Hilbert separabili e ℓ_2	323
	Serie di Fourier	324
	ℓ_2 come spazio delle coordinate	326
1.3	Alcuni polinomi ortonormali in L^2	327
2	Il principio di Dirichlet astratto ed i principi di ortogonalità	329
2.1	Il principio di Dirichlet astratto	330
	Il teorema di Riesz	332
	Il teorema della proiezione ortogonale	333
	Proprietà delle proiezioni	334
2.2	Forme bilineari	335
	Forme bilineari e operatori	335
	Operatore aggiunto	336
	L'operatore di Green	337
	Il metodo di Ritz	337
2.3	Il caso non simmetrico: teorema di Lax-Milgram	338
	Il metodo di Faedo-Galerkin	339
3	Operatori compatti	340
3.1	Il teorema dell'alternativa	342
3.2	Qualche complemento	344
	Altre dimostrazioni del teorema dell'alternativa	344
	Il teorema dell'alternativa in spazi di Banach	347
4	Lo spettro degli operatori compatti	348
4.1	Operatori compatti autoaggiunti	350
	Operatori compatti normali	353
	La teoria di Courant-Hilbert-Schmidt	354
	Caratterizzazione variazionale degli autovalori	356
5	Esercizi	357
XI.	Qualche Applicazione	361
1	Geodetiche minime negli spazi metrici	361
	Semicontinuità della lunghezza	361
	Compattezza	362
	Esistenza delle geodetiche minime	362
2	Un teorema di Gelfand-Kolmogorov	363
3	Equazioni differenziali ordinarie	365
3.1	Problema di Cauchy	365
	Teorema di prolungamento	368
	Equazioni e sistemi di ordine superiore	369
	Dipendenza continua dei dati	371
	Teorema di Peano	373
3.2	Problemi ai limiti	374
	Il metodo di shooting	376
	Principio di massimo	377
	Il metodo delle sopra e sottosoluzioni	379
	Un teorema di Bernstein	380

4	Equazioni integrali lineari	382
4.1	Qualche motivazione	382
	Equazione del primo ordine in forma debole	383
	Materiali con memoria	383
	Problema ai limiti	384
	Equilibrio di un filo teso	385
	Dinamica di un filo teso	385
4.2	Equazioni integrali di Volterra	387
4.3	Equazioni di Fredholm in C^0	389
5	Un problema di minimo negli spazi di Hilbert	390
	Convergenza debole negli spazi di Hilbert	390
	Esistenza dei minimi di funzionali convessi coercivi	392
6	Serie di Fourier	393
6.1	Definizioni e richiami	395
	Nucleo di Dirichlet	396
6.2	Convergenza puntuale e uniforme	398
	Funzioni regolari	399
	Criterio del Dini	399
	Convergenza uniforme	400
6.3	Convergenza in L^2 e uguaglianza dell'energia	400
	Serie di Fourier e ortogonalità	400
6.4	Qualche complemento	403
	Primitiva del nucleo di Dirichlet	403
	La funzione a "rampa"	404
	La seconda formula della media	407
	I principi di localizzazione di Riemann	408
6.5	Il teorema di Dirichlet-Jordan	409
6.6	Somme di Féjer	412
A.	Matematici e Altri Scienziati Citati	415
B.	Indice dei Quadri	417
C.	Nota Bibliografica	419