

Mariano Giaquinta
Giuseppe Modica

ANALISI MATEMATICA

2. Approssimazione e Processi Discreti

Indice

I.	Numeri Reali e Numeri Interi	1
1	Introduzione	1
1.1	La riduzione ai numeri naturali	2
1.2	Processi interminabili	4
1.3	Approccio costruttivo o assiomatico?	9
2	L'approccio assiomatico ai numeri reali	10
2.1	Proprietà algebriche	10
	Addizione	10
	Moltiplicazione	11
	Proprietà distributiva	12
	Ordinamento	12
2.2	Proprietà di continuità	13
	Maggioranti, estremo superiore, massimo	13
	Minoranti, estremo inferiore, minimo	15
	Retta reale estesa	15
	Sezioni di $\mathbb{R}$	15
	Radice n -esima	16
2.3	Unicità dei reali	17
3	Numeri interi	18
3.1	Numeri naturali e il principio di induzione	18
3.2	Numeri razionali e approssimazione	21
3.3	Proposizioni ricorsive	23
4	Esercizi	25
II.	Numeri Reali: Successioni	27
1	Successioni	27
1.1	Definizioni ricorsive	27
1.2	Limiti di successioni	30
	Proprietà e calcolo dei limiti di successioni	32
	Limiti di successioni monotone	34
	Successioni, estremo superiore e estremo inferiore	35
	Sottosuccessioni	35
2	Altre formulazioni dell'assioma di continuità	38
	Principio degli intervalli incapsulati o di Cantor	38

	Il criterio di Cauchy	38
	Massimo e minimo limite	40
	Teorema di Bolzano-Weierstrass	43
	Continuità dei reali	43
3	Limiti di successioni, limiti di funzioni e continuità	44
	Limiti di funzioni e limiti di successioni	45
	Funzioni continue in termini di successioni	46
4	Limiti notevoli	48
4.1	Una definizione alternativa delle funzioni esponenziale e logaritmo	57
	Una dimostrazione delle proprietà della funzione esponenziale senza riferimenti al calcolo	59
5	Esercizi	61
III.	Numeri Interi: Congruenze, Conteggi, Infinito	65
1	Congruenze	65
1.1	L'algoritmo di Euclide	65
	Il Massimo Comun Divisore	66
	Soluzioni intere di equazioni di primo grado	67
1.2	Fattorizzazione in numeri primi	68
1.3	Congruenze	70
1.4	La funzione di Eulero	72
1.5	Crittografia RSA	74
2	Problemi di conteggio	75
2.1	Liste	76
	Liste semplici	76
	Liste ordinate	78
2.2	Estrazioni	79
2.3	Sottoinsiemi e applicazioni	80
	Sottoinsiemi	80
	Applicazioni	80
	Applicazioni iniettive	81
	Formula di inclusione-esclusione	81
	Applicazioni surgettive	82
2.4	Problemi di collocazione	83
2.5	Distribuzioni ipergeometrica e multinomiale	85
3	L'infinito	87
3.1	L'Analisi Matematica dell'infinito	87
	Cardinalità	87
	Il teorema di Cantor-Bernstein	89
	Insiemi numerabili	92
	L'assioma della scelta	93
	La potenza del continuo	94
	L'ipotesi del continuo	95
3.2	La teoria degli insiemi: qualche notizia	96
4	Esercizi	99

IV. Numeri Complessi	105
1 Numeri complessi	106
1.1 Il sistema dei numeri complessi	106
Piano di Gauss	106
Coniugato	107
Modulo di un numero complesso	108
Forma trigonometrica: il piano di Argand	108
Prodotto di numeri complessi e rotazioni	109
Formula di de Moivre	109
Esponenziale complesso	109
1.2 Radici n -sime	111
Radici dell'unità	113
1.3 Logaritmo complesso	113
2 Successioni di numeri complessi	114
3 Qualche applicazione alla geometria euclidea elementare	116
3.1 Punti notevoli di un triangolo	116
3.2 Triangoli equilateri	119
4 Esercizi	122
V. Polinomi, Funzioni Razionali e Polinomi Trigonometrici	125
1 Polinomi	125
1.1 Il teorema di Ruffini ed il principio di identità dei polinomi	127
1.2 Il teorema fondamentale dell'algebra	129
Polinomi reali	133
2 Formule risolutive per le equazioni algebriche	134
2.1 Le equazioni di secondo, terzo e quarto grado	134
L'equazione di terzo grado	135
L'equazione di quarto grado	138
2.2 Le equazioni di grado superiore al quarto	139
3 Funzioni razionali	140
3.1 Fattorizzazione in $\mathbb{C}$	140
3.2 Fattorizzazione in $\mathbb{R}$	145
Integrazione delle funzioni razionali	147
4 Somme di funzioni sinusoidali	148
4.1 Funzioni sinusoidali reali	149
Funzioni periodiche	149
Polinomi trigonometrici	150
4.2 Polinomi trigonometrici e numeri complessi	151
Moto circolare uniforme in notazione complessa	151
Soluzioni complesse di equazioni differenziali del secondo ordine	152
Formule di prostaferesi	153
Battimenti	153
Polinomi trigonometrici complessi	153
Polinomi trigonometrici e spettro	154

	Campionamento di un polinomio trigonometrico	156
4.3	Somme di funzioni sinusoidali	159
5	Esercizi	161
VI.	Serie Numeriche	163
1	Il processo di somma	163
2	Serie	170
2.1	Serie convergenti, divergenti, indeterminate	170
	Serie e integrali impropri	173
	Condizione necessaria per la convergenza	174
	I numeri con la virgola	175
	Il calcolo approssimato di integrali	176
2.2	Serie a termini non negativi	179
	Serie a termini positivi decrescenti	181
	Criteri di convergenza	185
2.3	La funzione esponenziale e il numero e	188
	Il numero e	188
2.4	Serie a termini reali di segno variabile	190
	Convergenza assoluta	191
2.5	Serie a termini complessi	192
3	Serie di prodotti e prodotti di serie	193
3.1	Serie di prodotti	193
	Somma per parti: teoremi di Dirichlet e Abel	195
3.2	Prodotti di serie	200
3.3	Riordinamenti	204
4	Esercizi	208
VII.	Serie di Potenze	213
1	Convergenza	218
2	Continuità, derivazione e integrazione	222
2.1	Continuità della somma	222
	Convergenza uniforme	223
	Continuità del limite uniforme	224
2.2	Derivazione e integrazione di serie di potenze	225
	Serie derivata e serie integrale	225
	Serie di potenze reali	226
	Serie di potenze reali a coefficienti complessi	229
	Serie di potenze e serie di Taylor	230
	Serie di potenze complesse	230
3	Valori al bordo per le serie di potenze	233
4	Qualche applicazione	235
4.1	Serie di potenze e approssimazione	236
4.2	Integrazione per serie	241
4.3	La funzione esponenziale e π	242
	Esponenziale e logaritmo complesso	242

	Il numero π	243
5	Integrazione per serie delle equazioni differenziali	249
6	Funzioni generatrici	251
	Funzioni generatrice e trasformata di Laplace	253
6.1	Problemi di conteggio	254
	Combinazioni e estrazioni simultanee	254
	Disposizioni	256
	Collocazioni	257
	Partizioni	259
	Partizioni di interi	261
	Relazioni ricorsive	261
7	Esercizi	263
VIII.	Processi discreti	269
1	Ricorsioni	273
1.1	Alcuni esempi	273
1.2	Ricorsioni lineari	278
	Ricorsioni lineari del primo ordine	278
	Ricorsioni lineari del secondo ordine	280
1.3	I numeri di Fibonacci	282
1.4	Frazioni continue	284
	Approssimazione e ridotte	286
	Approssimazione diofantea di Dirichlet	291
	Frazioni continue periodiche	292
	Ordine di approssimazione e numeri trascendenti	292
2	Sistemi dinamici discreti uno dimensionali	293
2.1	Discretizzazione e modelli	294
	Il metodo di Eulero	294
	Il metodo di Runge-Kutta	296
	Modelli	297
2.2	Esempi di dinamiche discrete 1-dimensionali	298
	Dinamica espansiva	299
	Dinamica contrattiva: punti fissi	300
	Pozzi e sorgenti	300
	Orbite periodiche	302
	Dinamica ergodica	305
2.3	Dipendenza sensibile dai dati iniziali	309
	Esponenti di Liapunov	309
	Orbite caotiche	310
	La traslazione a sinistra di Bernoulli	311
	La mappa triangolare	312
	Mappe coniugate	313
	Intermittenza	314
2.4	Attrattori e frattali	316
	Esempi	317

	Insieme di Cantor e dimensione frattale	320
	Misura e dimensione di Hausdorff	323
3	Sistemi dinamici discreti due dimensionali	324
3.1	Bordi frattali	325
	Insiemi di Julia	325
	L'insieme di Mandelbrot	327
3.2	Frattali al computer	327
	Gli insiemi K_c	327
	L'insieme di Mandelbrot	328
	Insiemi di Julia e di Mandelbrot a colori	328
4	Esercizi	328
IX.	Un cenno al calcolo delle probabilità	333
1	Spazio probabilizzato	335
	Caso finito	335
	Caso numerabile	337
	Caso generale	340
	Spazio probabilizzato	341
1.1	Probabilità assoluta	343
	Formula di inclusione-esclusione	344
1.2	Probabilità condizionata	345
	Formula di Bayes	345
	Indipendenza	347
	Schema di Bernoulli	347
2	Variabili aleatorie discrete	348
	Distribuzione congiunta	350
	Speranza matematica	351
	Varianza	353
	Diseguaglianza di Chebychev	355
	Covarianza	355
	Legge dei grandi numeri	357
2.1	Esempi di variabili aleatorie	359
	Distribuzione di Bernoulli	359
	Distribuzione geometrica	363
	Tempo di attesa e distribuzione binomiale negativa	365
	Distribuzione ipergeometrica	366
	Distribuzione di Poisson	367
3	Esercizi	369
A.	Matematici e altri scienziati citati	373
B.	Nota Bibliografica	377
C.	Indice dei quadri	379