

**C.D. Pagani**

**S. Salsa**

# **ANALISI MATEMATICA**

**Volume 1**

**ZANICHELLI**

# INDICE

|                                                               |    |
|---------------------------------------------------------------|----|
| PREFAZIONE .....                                              |    |
| CAPITOLO 1 – ELEMENTI DI TEORIA DEGLI INSIEMI .....           | 1  |
| 1. Nozioni di logica matematica .....                         | 1  |
| 1.1 Logica delle proposizioni. Connettivi logici .....        | 1  |
| 1.2 Tavole di verità .....                                    | 3  |
| 1.3 Tautologie e regole di deduzione .....                    | 4  |
| 1.4 Logica dei predicati. Quantificatori .....                | 7  |
| 2. Simboli ed operazioni insiemistiche fondamentali .....     | 11 |
| 2.1 Definizioni .....                                         | 11 |
| 3. Relazioni .....                                            | 17 |
| 3.1 Prodotto cartesiano .....                                 | 17 |
| 3.2 Definizione di relazione .....                            | 18 |
| 3.3 Equivalenze .....                                         | 19 |
| 3.4 Ordinamenti .....                                         | 22 |
| 4. Funzioni .....                                             | 24 |
| 4.1 Definizione di funzione .....                             | 24 |
| 4.2 Funzioni particolari. Successioni, Multifunzioni .....    | 29 |
| 4.3 Funzione composta .....                                   | 32 |
| 4.4 Funzioni iniettive e suriettive. Funzione inversa .....   | 34 |
| 5. Insiemi finiti .....                                       | 37 |
| 5.1 Numeri cardinali. Numeri naturali .....                   | 37 |
| 5.2 Il principio di induzione .....                           | 40 |
| 6. Elementi di calcolo combinatorio .....                     | 46 |
| 6.1 Permutazioni, combinazioni, disposizioni .....            | 47 |
| *6.2 Il principio di inclusione ed esclusione .....           | 53 |
| *6.3 Probabilità in spazi finiti .....                        | 58 |
| 7. Insiemi infiniti .....                                     | 63 |
| Appendice – Cenni alla teoria assiomatica degli insiemi ..... | 65 |
| 1. Linguaggio della teoria .....                              | 65 |
| 2. Apparato deduttivo .....                                   | 66 |
| CAPITOLO 2 – INSIEMI NUMERICI .....                           | 69 |
| 1. Da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Q}$ .....                       | 69 |
| 1.1 Rappresentazione dei numeri naturali .....                | 69 |
| 1.2 I numeri interi relativi .....                            | 71 |
| 1.3 I numeri razionali .....                                  | 72 |
| 1.4 Struttura di $\mathbb{Q}$ .....                           | 73 |
| 1.5 Rappresentazione dei numeri razionali .....               | 75 |
| 2. I numeri reali .....                                       | 78 |
| 2.1 Definizione di numero reale .....                         | 78 |
| 2.2 Ordinamento .....                                         | 79 |
| 2.3 Struttura algebrica .....                                 | 80 |
| 2.4 Proprietà di completezza .....                            | 83 |
| 2.5 Isomorfismo tra campi ordinati completi .....             | 86 |
| 2.6 Potenza del continuo .....                                | 87 |

|                                                                                           |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Appendice A Dimostrazione delle proprietà di campo ordinato dei numeri reali .....        | 89  |
| Appendice B – I numeri-macchina. Errori .....                                             | 93  |
| <b>3. Radicali – Potenze – Logaritmi</b> .....                                            | 98  |
| 3.1 Radici $n$ -esime aritmetiche .....                                                   | 98  |
| 3.2 Potenze con esponente reale .....                                                     | 100 |
| 3.3 Logaritmi .....                                                                       | 101 |
| 3.4 Alcune disuguaglianze .....                                                           | 102 |
| <b>4. I numeri complessi</b> .....                                                        | 105 |
| 4.1 Definizione di $\mathbb{C}$ e struttura di campo .....                                | 105 |
| 4.2 Coniugato, modulo e argomento .....                                                   | 107 |
| 4.3 Potenze e radici .....                                                                | 111 |
| <b>CAPITOLO 3 – SPAZI EUCLIDEI</b> .....                                                  | 117 |
| <b>1. Gli spazi euclidei: <math>\mathbb{R}^n</math> e <math>\mathbb{C}^n</math></b> ..... | 117 |
| 1.1 Spazi vettoriali lineari .....                                                        | 117 |
| 1.2 Gli spazi $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ .....                                       | 120 |
| *1.3 Gruppi .....                                                                         | 123 |
| 1.4 Prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$ .....                                              | 125 |
| 1.5 Prodotto scalare in $\mathbb{C}^n$ .....                                              | 131 |
| <b>2. Elementi di topologia in <math>\mathbb{R}^n</math></b> .....                        | 134 |
| 2.1 Punti interni, esterni, di frontiera, di accumulazione, isolati .....                 | 134 |
| 2.2 Insiemi aperti, chiusi, limitati .....                                                | 136 |
| 2.3 La retta ampliata. Gli spazi $\mathbb{R}^n$ .....                                     | 142 |
| 2.4 Insiemi compatti .....                                                                | 144 |
| 2.5 Insiemi connessi. Insiemi convessi .....                                              | 146 |
| <b>CAPITOLO 4 – L'OPERAZIONE DI LIMITE</b> .....                                          | 151 |
| <b>1. Funzioni reali di variabile reale</b> .....                                         | 151 |
| 1.1 Positività e simmetrie .....                                                          | 151 |
| 1.2 Funzioni limitate .....                                                               | 153 |
| 1.3 Funzioni monotone .....                                                               | 156 |
| <b>2. Limiti di funzioni da <math>\mathbb{R}</math> in <math>\mathbb{R}</math></b> .....  | 159 |
| 2.1 Definizione di limite .....                                                           | 159 |
| 2.2 Limite destro, sinistro, per eccesso, per difetto, in $\mathbb{R}$ .....              | 162 |
| 2.3 Calcolo dei limiti .....                                                              | 165 |
| 2.4 Esistenza del limite (per funzioni monotone) .....                                    | 173 |
| 2.5 Infinitesimi ed infiniti. Confronti. ....                                             | 177 |
| <b>3. Successioni a valori in <math>\mathbb{R}</math></b> .....                           | 184 |
| 3.1 Limite di una successione .....                                                       | 184 |
| 3.2 Confronti .....                                                                       | 188 |
| 3.3 Il numero $e$ , $\pi$ , alcuni limiti notevoli .....                                  | 192 |
| 3.4 Esistenza del limite. Massimo e minimo limite .....                                   | 197 |
| 3.5 Esistenza del limite finito. Criterio di Cauchy .....                                 | 202 |
| *3.6 Frazioni continue .....                                                              | 204 |
| <b>4. Limiti in <math>\mathbb{C}</math>. Limiti in <math>\mathbb{R}^n</math></b> .....    | 210 |
| 4.1 Funzioni da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ e loro limiti .....                      | 210 |
| 4.2 Successioni e topologia di $\mathbb{R}^n$ .....                                       | 216 |
| 4.3 Il criterio di Cauchy .....                                                           | 219 |

|                                                                                      |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>CAPITOLO 5 – FUNZIONI CONTINUE</b>                                                | 223 |
| 1. Funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$                                 | 223 |
| 1.1 Definizione di continuità                                                        | 223 |
| 1.2 Punti di discontinuità                                                           | 226 |
| 1.3 Proprietà fondamentali delle funzioni continue su un intervallo                  | 228 |
| 1.4 La continuità uniforme                                                           | 232 |
| 2. Funzioni continue da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$                             | 235 |
| 2.1 Una caratterizzazione delle funzioni continue                                    | 235 |
| 2.2 Funzioni continue su un compatto                                                 | 239 |
| 2.3 Funzioni continue su un connesso                                                 | 240 |
| 3. Funzioni elementari                                                               | 242 |
| 3.1 Funzioni razionali intere, Polinomi                                              | 242 |
| 3.2 Funzioni razionali fratte                                                        | 246 |
| 3.3 Funzioni algebriche                                                              | 250 |
| 3.4 Esponenziali e logaritmi                                                         | 251 |
| 3.5 Funzioni iperboliche e loro inverse                                              | 254 |
| 3.6 Funzioni circolari (o trigonometriche) e loro inverse                            | 257 |
| 3.7 Esponenziale complesso                                                           | 263 |
| 3.8 Logaritmo complesso. Operazione di elevamento a potenza nel campo complesso      | 265 |
| <b>CAPITOLO 6 – CALCOLO DIFFERENZIALE 1. FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE</b>       | 271 |
| 1. Derivata e differenziale                                                          | 271 |
| 1.1 Definizione di derivata. Derivata destra, derivata sinistra. Derivate successive | 271 |
| 1.2 Algebra delle derivate                                                           | 279 |
| 1.3 Derivata di funzione composta. Derivata logaritmica                              | 282 |
| 1.4 Derivata di funzione inversa                                                     | 286 |
| 1.5 Differenziale                                                                    | 290 |
| 2. I teoremi fondamentali del calcolo differenziale                                  | 292 |
| 2.1 Teorema di Fermat. Estremi locali                                                | 292 |
| 2.2 Teoremi di Rolle, Cauchy, Lagrange                                               | 294 |
| 2.3 Prime conseguenze del teorema di Lagrange                                        | 296 |
| 2.4 Il teorema di de L'Hôpital                                                       | 301 |
| 2.5 La formula di Taylor                                                             | 307 |
| 3. Alcune applicazioni                                                               | 319 |
| 3.1 Funzioni convesse e concave                                                      | 319 |
| 3.2 Applicazioni della formula di Taylor                                             | 326 |
| 3.3 Determinazione del grafico di una funzione                                       | 333 |
| 3.4 Risoluzione numerica di equazioni                                                | 336 |
| <b>CAPITOLO 7 – CALCOLO DIFFERENZIALE 2. FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI</b>               | 349 |
| 1. Funzioni da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$                                        | 349 |
| 1.1 Derivate direzionali e derivate parziali                                         | 349 |
| 1.2 Differenziale                                                                    | 353 |
| 1.3 Derivate e differenziali di ordine superiore                                     | 359 |
| 1.4 Formula di Taylor                                                                | 367 |
| 1.5 Funzioni omogenee; funzioni convesse e concave                                   | 369 |

|                                                                 |     |
|-----------------------------------------------------------------|-----|
| <b>2. Funzioni a valori vettoriali</b>                          | 378 |
| 2.1 Derivate e differenziali                                    | 378 |
| 2.2 Differenziale delle funzioni composte                       | 386 |
| 2.3 Funzioni da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$                    | 388 |
| 2.4 Il teorema di inversione locale                             | 391 |
| <b>3. Funzioni implicite</b>                                    | 401 |
| 3.1 Esempi preliminari                                          | 401 |
| 3.2 Il teorema di Dini                                          | 403 |
| 3.3 Insiemi di livello. Punti singolari                         | 408 |
| 3.4 Inviluppo di una famiglia di curve                          | 418 |
| 3.5 Il teorema delle funzioni implicite in più di due variabili | 423 |
| 3.6 Funzioni definite da un sistema di equazioni                | 429 |
| <br><b>CAPITOLO 8 – INTEGRALI DI FUNZIONI DI UNA VARIABILE.</b> |     |
| <b>SERIE NUMERICHE</b>                                          | 437 |
| <b>1. Integrale di Riemann</b>                                  | 437 |
| 1.1 Definizione di integrale                                    | 437 |
| 1.2 Caratterizzazioni dell'integrale e significato geometrico   | 441 |
| 1.3 Classi di funzioni integrabili                              | 445 |
| 1.4 Proprietà dell'integrale                                    | 447 |
| 1.5 Il teorema fondamentale del calcolo integrale.              |     |
| Integrale indefinito                                            | 451 |
| 1.6 Regole di integrazione                                      | 457 |
| 1.7 Integrazione numerica                                       | 460 |
| 1.8 Integrali dipendenti da un parametro                        | 463 |
| <b>2. Serie numeriche</b>                                       | 475 |
| 2.1 Definizione di serie e prime proprietà                      | 475 |
| 2.2 Serie a termini non negativi                                | 480 |
| 2.3 Convergenza e convergenza assoluta                          | 487 |
| 2.4 Operazioni sulle serie                                      | 491 |
| 2.5 Proprietà associativa e commutativa                         | 494 |
| *2.6 Medie aritmetiche                                          | 497 |
| <b>3. Estensioni dell'integrale di Riemann</b>                  | 502 |
| 3.1 Integrali impropri                                          | 502 |
| 3.2 Criteri di convergenza                                      | 506 |
| 3.3 Serie e integrali                                           | 510 |
| *3.4 Integrale di Stieltjes                                     | 511 |
| <b>Appendice – Cenno all'Analisi non-standard</b>               | 518 |
| <br><b>INDICE ANALITICO</b>                                     | 525 |