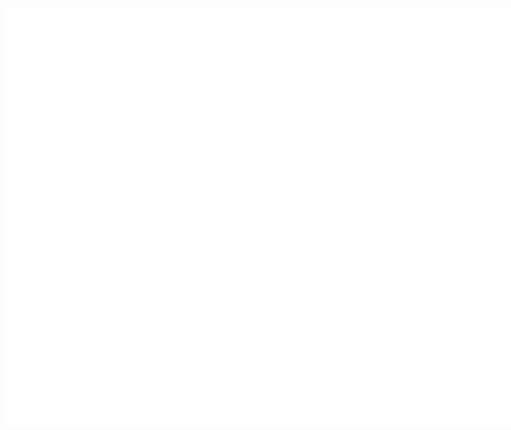


ASSUNTA RUSSO

LEZIONI DI TOPOLOGIA

Spazi topologici, gruppo fondamentale, omologia singolare



ARACNE

INDICE

INTRODUZIONE	11
AVVERTENZE	13
Capitolo 1. Generalità sugli spazi topologici	15
1 Definizione di spazio topologico, esempi, generalità	16
1.1. Topologia su un insieme	16
1.2. Interno	17
1.3. Topologia naturale di $\mathbb{R}$ e di $\mathbb{R}^n$	19
2 Insiemi chiusi. Chiusura	22
3 Basi. Sottobasi	26
4 Interni. Basi locali	32
4.1. Punti aderenti, d'accumulazione, di frontiera	35
5 Sottospazi	39
C Complementi	42
C.1. Richiami sui numeri reali	42
C.2. Generalità sugli spazi metrici	46
C.3. Il reticolo delle topologie su un insieme	52
Capitolo 2. Continuità e convergenza	65
1 Continuità	65
1.1. Funzioni continue	65
1.2. Funzioni continue in un punto	72
1.3. Le algebre $C(S)$ e $C^*(S)$	75
2 Omeomorfismi. Immersioni	79
2.1. Funzioni aperte. Funzioni chiuse	79
2.2. Omeomorfismi: generalità	81
2.3. Alcuni esempi notevoli di omeomorfismi	84
2.4. Immersioni	91
3 Convergenza (di successioni)	93
C Complementi	98
C.1. Topologie deboli. Topologie forti	98
C.2. Famiglie localmente finite	100
C.3. Reti e filtri	101
C.4. Spazi metrici completi	109

Capitolo 3. Spazi prodotto	125
1 Premesse	125
2 Prodotto topologico di due spazi	126
3 Continuità e spazi prodotto	132
C Complementi	138
C.1. Prodotti infiniti	138
C.2. Spazi T_3	147
C.3. Spazi immergibili in uno spazio prodotto	149
C.4. Spazi di Tychonoff (o $T_{3\frac{1}{2}}$)	152
C.5. Spazi T_4 . Teorema di metrizzazione di Urysohn	157
Capitolo 4. Spazi quoziente	167
1 Premesse	167
2 Topologia quoziente	170
2.1. Rappresentazione di spazi quoziente	171
3 Esempi di spazi quoziente	172
3.1. La circonferenza S_1 come quoziente di I	173
3.2. Il cilindro $S_1 \times I$ come quoziente del quadrato I^2	173
3.3. Il toro $S_1 \times S_1$ come quoziente del quadrato I^2	174
3.4. Il piano proiettivo reale	175
3.5. Spazi ottenuti per collasso di un sottoinsieme di uno spazio a un punto	175
3.6. Sospensione di uno spazio	178
3.7. Spazi d'attaccamento	179
3.8. Wedge (o bouquet) di spazi	180
3.9. Nastro di Möbius e bottiglia di Klein	181
C Complementi	183
C.1. Funzioni quoziente	183
C.2. Ulteriori applicazioni del teorema di rappresentazione	185
C.3. Spazi quoziente e topologie forti	195
Capitolo 5. Connessione	203
1 Definizione e proprietà	203
2 Connessione in $\mathbb{R}^n$	205
2.1. Una caratterizzazione dei connessi di $\mathbb{R}$	206
2.2. Connessione per poligoni	209
3 Componenti connesse. Insiemi che sconnettono. Punti di taglio	212
4 Connessione per cammini	217

4.1. Premesse	217
4.2. Connessione per cammini	220
C Complementi	224
C.1. Connessione e prodotti infiniti	224
C.2. Spazi di Peano	225
Capitolo 6. Compattezza	235
1 Definizione, esempi, proprietà	235
2 Compattezza in $\mathbb{R}^n$	243
3 Compattezza locale, Spazi di Baire	246
4 Compattificazione	250
C Complementi	256
C.1. Assioma di Hausdorff e quozienti	256
C.2. Il teorema di Tychonoff	259
C.3. La compattificazione di Stone-Čech	261
C.4. k -spazi	265
C.5. Topologia "compatto-aperto"	265
C.6. Numero di Lebesgue	267
Capitolo 7. Superfici	277
1 Varietà topologiche	277
2 Superfici	279
2.1. Somma connessa	280
3 Classificazione delle superfici compatte	288
3.1. Triangolazioni	288
3.2. Orientabilità e caratteristica di Eulero	292
3.3. Classificazione delle superfici compatte	295
C Complementi	297
C.1. Immergibilità delle varietà compatte in uno spazio euclideo	297
C.2. Varietà con bordo	297
C.3. Sulla somma connessa di due superfici	302
Capitolo 8. Gruppo fondamentale	309
1 Omotopia	309
2 Retratti. Retratti di deformazione, Spazi aventi lo stesso tipo omotopico (o omotopicamente equivalenti)	314
3 Gruppo fondamentale	324
3.1. Premesse	324
3.2. Gruppo fondamentale di uno spazio in un fissato punto	330

4 Il gruppo fondamentale della circonferenza. Applicazioni	339
4.1. Calcolo del gruppo fondamentale di S_1	339
4.2. Applicazioni	348
5 Il teorema di Seifert-Van Kampen	352
6 Gruppo fondamentale delle superfici compatte (connesse) e loro classificazione	356
C Complementi	365
C.1. Proprietà di prolungamento dell'omotopia	365
C.2. Rivestimenti	368
Capitolo 9. Omologia singolare	391
1 Complessi di catene	391
1.1. Premesse e definizione	391
1.2. Omologia di un complesso di catene	392
1.3. Omotopia di morfismi di catene	394
1.4. Successione esatta in omologia	394
1.5. Sottocomplessi, complessi quoziente, somma diretta di complessi	397
2 Omologia singolare di uno spazio	398
2.1. Il complesso singolare di uno spazio e relativa omologia	399
3 Primi esempi di calcolo in omologia	403
4 Omomorfismo indotto in omologia da una funzione continua	405
4.1. Invarianza omotopica dell'omologia	406
5 Omologia ridotta	409
5.1. Omomorfismo indotto in omologia ridotta da una funzione con- tinua	410
6 La successione di Mayer-Vietoris	411
7 Successione di Mayer-Vietoris: applicazioni	416
7.1. Omologia delle sfere	416
7.2. Grado di Brouwer	419
7.3. Teorema di separazione di Jordan-Brouwer e teorema d'inva- rianza del dominio	422
8 Relazione tra gruppo fondamentale e primo gruppo d'omologia	428
8.1. Il complesso $S'(X)$	429
8.2. L'omomorfismo di Hurewicz	431
8.3. Isomorfismo tra il primo gruppo d'omologia e l'abelianizzato del gruppo fondamentale di uno spazio connesso per cammini	433
9 Omologia delle superfici compatte	434
C Complementi	436
C.1. Sulle successioni corte esatte	437

Appendice Richiami di algebra	445
1 Prodotto cartesiano e prodotto diretto di gruppi	445
2 Abelianizzato di un gruppo	446
3 Elementi periodici (o di torsione)	446
4 Gruppo libero su un insieme	447
5 Presentazioni	449
6 Gruppi abeliani liberi	450
7 Prodotto libero e prodotto libero con amalgama	451
BIBLIOGRAFIA	453
Indice analitico	457