

LEÇONS
SUR LES
FAMILLES NORMALES
DE
FONCTIONS ANALYTIQUES
ET LEURS APPLICATIONS

PAR
Paul MONTEL
Professeur à la Faculté des Sciences de Paris

RECUEILLIES ET RÉDIGÉES
Par J. BARBOTTE
Agrégé-Préparateur à l'École Normale supérieure

CHELSEA PUBLISHING COMPANY
BRONX, NEW YORK

TABLE DES MATIÈRES.

PREFACE.....	Pages. V
TABLE DES MATIÈRES.....	VII

CHAPITRE I.

ENSEMBLES DE POINTS. FAMILLES DE FONCTIONS.

Ensembles. Domaines.

1. Ensemble. Point limite.....	1
2. Ensemble dérivé.....	3
3. Points intérieurs et extérieurs. Frontières. Domaines.....	5
4. Ensembles continus.....	7
5. Courbes de Jordan. Points frontières accessibles.....	8
6. Ensembles de points dans un espace quelconque.....	13
7. Ensembles de points dans un espace fonctionnel.....	15

Familles de fonctions.

8. Théorème de Weierstrass.....	18
9. Accumulation des valeurs.....	20
10. Fonctions bornées dans leur ensemble.....	21
11. Égale continuité.....	22
12. Existence des fonctions limites.....	23
13. Cas d'un domaine ouvert.....	25
14. Cas des fonctions non analytiques.....	26
15. Théorème de Stieltjes.....	28
16. Théorème de M. Vitali.....	30
17. Fonctions admettant une région exceptionnelle.....	30
18. Définition d'une famille normale.....	32
19. Famille normale en un point.....	33
20. Familles normales et bornées.....	35
21. Nombre des zéros des fonctions d'une famille normale.....	36
22. Points irréguliers. Suites exceptionnelles.....	37
23. Familles de fonctions harmoniques. Théorème de Harnack.....	39
24. Quotients de fonctions bornées.....	40
25. Famille normale de fonctions N.....	44

CHAPITRE II.

FONCTIONS HOLOMORPHES A VALEURS EXCEPTIONNELLES. FAMILLES QUASI-NORMALES.

Fonctions de Schwarz.

	Pages.
26. Théorème de M. Painlevé.....	46
27. Méthode des images.....	48
28. Fonctions de Schwarz.....	51
29. Pavage du cercle fondamental.....	53
30. Substitutions fondamentales.....	56
31. Construction d'une fonction de Schwarz.....	57

Familles de fonctions holomorphes à valeurs exceptionnelles.

32. Critère fondamental.....	61
33. Généralisation.....	65

Familles quasi-normales.

34. Définition d'une famille quasi-normale.....	66
35. Points irréguliers.....	66
36. Critère fondamental.....	67
37. Cas où une famille quasi-normale est normale.....	69
38. Extension des critères des familles quasi-normales ou normales.....	73

CHAPITRE III.

ÉTUDE DES FONCTIONS UNIFORMES AUTOUR D'UN POINT ESSENTIEL ISOLÉ.

39. Principe de la méthode.....	75
40. Premier théorème de M. Picard.....	75
41. Généralisations.....	76
42. Second théorème de M. Picard.....	77
43. Généralisations.....	79
44. Théorème de M. Julia.....	81
45. Cas des fonctions entières.....	83
46. Théorème de M. Schottky.....	85
47. Théorème de M. Landau.....	87
48. Généralisations.....	88

CHAPITRE IV.

REPRÉSENTATION CONFORME.

Représentation conforme d'un domaine ouvert.

49. Fonctions multivalentes.....	93
50. Représentation de l'intérieur d'un domaine sur un cercle.....	93
51. Théorème de Poincaré.....	94
52. Théorème de M. Carathéodory.....	98

Correspondance entre les frontières.

Pages

53. Points frontières accessibles	103
54. Points accessibles d'une seule manière.....	107
55. Ensemble des points accessibles	109
56. Transversales d'un domaine	110
57. Approche discontinue des points frontières. Suites pures	110
58. Bouts premiers.....	114
59. Domaines limités par une courbe de Jordan.....	116
60. Théorème de M. Fejér.....	118

CHAPITRE V.

FAMILLES DE FONCTIONS MÉROMORPHES.

Familles normales.

61. Convergence uniforme	124
62. Famille normale	125
63. Points irréguliers. Suites exceptionnelles.....	126
64. Égale continuité sur la sphère de Riemann.....	127
65. Nombre des zéros des fonctions d'une famille normale	130
66. Propriétés quantitatives.....	131
67. Fonctions à valeurs asymptotiques.....	133
68. Identités de M. Borel.....	135

Familles quasi-normales.

69. Définition. Propriétés des points irréguliers.....	137
70. Ordre d'un point irrégulier. Ordre total	141
71. Familles quasi-normales de fonctions dont le nombre des zéros est borné.....	145
72. Cas où les fonctions limites sont finies.....	147

CHAPITRE VI.

FAMILLES QUASI-NORMALES PARTICULIÈRES.

Familles de fonctions à valeurs quasi-exceptionnelles.

73. Critère fondamental.....	149
74. Extension du théorème de M. Schottky.....	151
75. Généralisations.....	152
76. Extension du théorème de M. Landau.....	153
77. 78. 79. Cas particuliers.....	156

Fonctions méromorphes exceptionnelles.

80. Définition d'une fonction exceptionnelle.....	158
81. Conditions d'existence	160
82. Conditions de M. Ostrowski.....	163
83. Réciproque.....	168
84. Théorème général.....	173

CHAPITRE VII.

SUITES DE FONCTIONS ANALYTIQUES.

Suites de fonctions holomorphes.

	Pages.
85. Nature de la convergence d'une suite normale ou quasi-normale.....	177
86. Suites qui convergent en une infinité de points intérieurs.....	178
87. Théorème de M. Blaschke.....	179
88. Extension aux fonctions N	183
89. Extension aux fonctions non bornées.....	184
90. Suites qui convergent sur une partie de la frontière.....	188
91. Généralisations.....	192
92. Théorème des trois cercles, de M. Hadamard.....	196
93. Rapidité de la convergence. Extension du théorème de Stieltjes.....	197
94. Séries convergentes de fonctions holomorphes.....	200
95. Théorème de M. Jentzsch.....	201
96. Théorème de M. Ostrowski.....	204

Suites de fonctions méromorphes.

97. Nature de la convergence d'une suite normale ou quasi-normale.....	207
98. Suites qui convergent en une infinité de points intérieurs.....	208
99. Suites convergentes de fonctions méromorphes.....	209
100. Ensemble des points irréguliers.....	211

CHAPITRE VIII.

ITÉRATION DES FRACTIONS RATIONNELLES.

101. Conséquents. Antécédents.....	213
102. Points fixes. Cycles.....	215
103. Multiplicateurs. Domaine d'attraction.....	218
104. Limitation du nombre des cycles attractifs.....	219
105. Rapports entre l'itération et les équations fonctionnelles.....	224
106. Limitation du nombre des cycles mixtes.....	222
107. Points fixes répulsifs.....	226
108. Exemples d'itération.....	228
109. Ensemble $\mathcal{F}$ des points irréguliers.....	230
110. Invariance de l'ensemble $\mathcal{F}$	231
111. Structure de l'ensemble $\mathcal{F}$	231
112. Homogénéité de l'ensemble $\mathcal{F}$	235
113. Exemples d'ensembles $\mathcal{F}$	236
114. Distribution des domaines d'attraction.....	237

CHAPITRE IX.

FAMILLES DE FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES.

Familles normales de fonctions de deux variables.

	Page
115. Fonctions analytiques de deux variables complexes.....	238
116. Familles normales de fonctions holomorphes.....	240
117. Fonctions bornées dans leur ensemble.....	241
118. Accumulation des valeurs.....	242
119. Fonctions admettant une région exceptionnelle.....	243
120. Fonctions admettant deux valeurs exceptionnelles.....	244
121. Suites normales convergeant en une infinité de points.....	245
122. Ensemble des points irréguliers.....	248
123. Structure de l'ensemble (F).....	250

Familles de fonctions uniformisantes.

124. Théorème de M. Picard.....	252
125. Cas d'une relation algébrique de genre un.....	255
126. Cas d'une relation algébrique de genre zéro.....	257

CHAPITRE X.

FAMILLES COMPLEXES ET APPLICATIONS.

Familles complexes normales.

127. Combinaisons exceptionnelles.....	259
128. Fonctions entières, Nombre maximum de combinaisons exceptionnelles.....	260
129. Classe d'un système de fonctions.....	262
130. Tableaux triangulaires de combinaisons.....	263
131. Définition d'une famille complexe normale.....	265
132. Critère d'une famille complexe normale.....	266

Familles complexes particulières.

133. Systèmes de trois fonctions holomorphes toujours inégales.....	269
134. Généralisations.....	273
135. Cas où les fonctions peuvent être égales.....	275
136. Sur certaines familles normales.....	278
137. Systèmes de quatre fonctions méromorphes toujours inégales.....	284
138. Généralisations.....	286

Fonctions algébroides admettant des involutions exceptionnelles.

139. Involution.....	287
140. Fonction algébroïde, Involution exceptionnelle.....	289
141. Classe d'algébroides.....	290

	Pages
142. Nombre maximum d'involutions exceptionnelles.....	291
143. Ordre d'une valeur exceptionnelle.....	292
144. Familles normales de fonctions algébroides.....	293
145. Cas des fonctions non bornées.....	294
146. Critère d'une famille normale.....	295
147. Extension du théorème de M. Schottky.....	295
148. Extension du théorème de M. Landau.....	297
149. Généralisations.....	297
150. Fonctions algébroides non entières.....	299
INDEX.....	301