Francine Diener, Georges Reeb

ANALYSE NON STANDARD

HERMANN ÉDITEURS DES SCIENCES ET DES ARTS

Sommaire

Avant propos 3

Introduction 5

1 Le principe de transfert 7
1.1 Le principe et ses corollaires 7
1.2 Applications à l'analyse élémentaire 12
1.3 Exercices et problèmes 20

2 Le principe d'idéalisation 25
2.1 Le principe et ses corollaires 25
2.2 Applications à l'analyse élémentaire 28
2.3 Exercices et problèmes 30

3 Le principe de standardisation 33
3.1 Le principe et ses corollaires 33
3.2 Applications à l'analyse élémentaire 38
3.3 Intégrale de Lebesgue 41
3.4 Espaces métriques 45
3.5 Exercices et problèmes 48

4 Ensembles externes 51
4.1 Définitions et principe de Cauchy 51
4.2 Espaces topologiques 59
4.3 Ombre d'un ensemble 61
4.4 Exercices et problèmes 64

5 Principes de permanence 71
5.1 Halos et galaxies 71
5.2 Principes de permanence 74
5.3 Quelques propriétés syntaxiques de IST 77
5.4 Applications 80
5.5 Exercices et problèmes 87

6 S-Continuité 93
6.1 Définitions et exemples . . . 93
6.2 Théorème de l'ombre continue . . . 96
6.3 Applications à l'analyse classique . . . 100
6.4 A propos des distributions . . . 103
6.5 Exercices et problèmes . . . 106

7 S-Dérivabilité 111
7.1 Définitions et propriétés . . . 111
7.2 Changements d'échelles . . . 114
7.3 Le théorème de l'ombre dérivable . . . 119
7.4 Application au calcul différentiel . . . 122
7.5 Exercices et problèmes . . . 127

8 Equations différentielles 131
8.1 Existence des solutions . . . 131
8.2 Le lemme de l'ombre courte . . . 137
8.3 Equations différentielles vues à la loupe . . . 140
8.4 Exercices et problèmes . . . 143

9 0, 1, 2, etc...ne remplissent pas N 151
9.1 Les entiers naïfs de N . . . 151
9.2 Le principe d'induction . . . 153
9.3 Objets (naïfs) de IST . . . 153
9.4 Un tableau concernant ZFC . . . 155
9.5 Discussion des cases faciles du tableaux . . . 156
9.6 La case (F,f) : conflit aigu . . . 157
9.7 Les cases (F,f'), (T,f), (T,v) . . . 158
9.8 En guise de conclusion . . . 158

A Corrigés des exercices 159
A.1 Exercices du chapitre 1 . . . 159
A.2 Exercices du chapitre 2 . . . 162
A.3 Exercices du chapitre 3 . . . 164
A.4 Exercices du chapitre 4 . . . 168
A.5 Exercices du chapitre 5 . . . 173
A.6 Exercices du chapitre 6 . . . 178
A.7 Exercices du chapitre 7 . . . 182
A.8 Exercices du chapitre 8 . . . 184

Bibliographie 191

Index 193