

Jean-Pierre Kahane et Raphaël Salem

Ensembles parfaits et séries trigonométriques

HERMANN  ÉDITEURS DES SCIENCES ET DES ARTS

TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE	7
PRÉFACE DE LA PREMIÈRE ÉDITION	9
INTRODUCTION	11
CHAPITRE I. Description de quelques ensembles linéaires	13
§ 1. Programme	13
§ 2. Ensembles parfaits symétriques	13
§ 3. Fonction de Lebesgue L sur un ensemble parfait symétrique, coefficients de Fourier-Stieltjes de dL	14
§ 4. Ensembles parfaits symétriques à rapport constant	15
§ 5. Coefficients de Fourier-Stieltjes de dL dans ce cas	16
§ 6. Ensembles parfaits homogènes	16
§ 7. Fonction de Lebesgue et L -mesure dans ce cas	17
§ 8. Ensembles parfaits de translation	18
§ 9. Fonction de Lebesgue et L -mesure dans ce cas	19
§ 10. Une propriété caractéristique des ensembles parfaits de translation	20
§ 11. Ensembles parfaits indépendants	20
§ 12. Théorème de Kronecker	21
CHAPITRE II. Mesures et dimension de Hausdorff	23
§ 1. Programme	23
§ 2. Fonction déterminante k et k -mesure	23
§ 3. Mesure de la dimension α . Cas des ensembles homogènes	24
§ 4. Dimension de Hausdorff	27
§ 5. Interprétation de la dimension de Hausdorff	28
§ 6. Majorations	28
§ 7. Toute L -mesure est une k -mesure	30
§ 8. Un théorème de Hausdorff	30
CHAPITRE III. Capacités	31
§ 1. Programme	31
§ 2. Noyau ; potentiel d'une mesure	31
§ 3. Capacité, dimension capacitaire	33
§ 4. Énergie	34
§ 5. Théorie de l'équilibre pour des mesures	36
§ 6. Théorie de l'équilibre pour des hyperdistributions	37
§ 7. Critère pour que la capacité d'ordre α (ou logarithmique) soit positive	39
§ 8. Un théorème sur les séries de Fourier-Stieltjes	40
CHAPITRE IV. Capacités et divergence des séries trigonométriques	43
§ 1. Théorème de Kolmogoroff-Seliverstov et programme	43
§ 2. Condition nécessaire pour qu'un ensemble soit ensemble de divergence pour des séries trigonométriques d'un certain type	43
§ 3. Condition suffisante	47
§ 4. Comportement radial de fonctions harmoniques	49

CHAPITRE V. Unité du développement trigonométrique. Théorie Générale	52
§ 1. Historique et Programme	52
§ 2. Un ensemble fermé est du type U si et seulement s'il ne porte aucune pseudofonction non nulle	53
§ 3. Démonstration	54
§ 4. Suite de la démonstration : théorie de Riemann	55
§ 5. Ensembles de multiplicité au sens strict	57
§ 6. Une condition garantissant qu'un ensemble est de type U	58
§ 7. Ensembles de type H et ensembles de type H (*)	58
§ 8. Quelques propriétés simples des ensembles d'unicité	61
CHAPITRE VI. Unité du développement trigonométrique (suite). Cas des ensembles parfaits symétriques à rapport constant	63
§ 1. Programme : classification des ensembles E	63
§ 2. La classe S. Théorème de Poul. Lemmes	63
§ 3. Démonstration des lemmes	65
§ 4. Démonstration du théorème	67
§ 5. Les nombres de la classe S forment un ensemble fermé	69
§ 6. Condition nécessaire pour que E soit du type U	72
§ 7. Condition suffisante	74
§ 8. Cas des ensembles homogènes	78
CHAPITRE VII. Les ensembles de convergence absolue	83
§ 1. Programme	83
§ 2. Conditions nécessaires pour qu'un ensemble soit du type N	83
§ 3. Une condition suffisante	86
§ 4. Ensemble du type N, et ensembles du type N	88
§ 5. Bases. Réunion d'ensembles du type N	89
§ 6. Ensemble de convergence absolue d'une série donnée	90
§ 7. Une nouvelle condition nécessaire pour qu'un ensemble parfait soit du type N. Application aux ensembles parfaits symétriques	91
§ 8. Exemples d'ensembles du type N	94
§ 9. Convergence absolue et dimension de Hausdorff	96
§ 10. Cas des ensembles parfaits de translation	98
CHAPITRE VIII. Étude probabiliste du comportement à l'infini des coefficients de Fourier. Séries des mesures portées par un ensemble	99
§ 1. Rappel de résultats antérieurs et programme	99
§ 2. Ensembles de multiplicité aléatoires	100
§ 3. Définition d'un parfait indépendant du type M	101
§ 4. Comportement à l'infini des transformées de Fourier des L-mesures	106
§ 5. Compléments	110
§ 6. Application à un problème de Beurling	111

CHAPITRE IX. Les ensembles de synthèse harmonique	113
§ 1. Analyse et synthèse dans ℓ^∞	113
§ 2. Solution du problème de l'analyse. Spectre d'une suite	114
§ 3. Énoncés du problème de synthèse	114
§ 4. Théorème de Malliavin	116
§ 5. Pseudomesures ne satisfaisant pas la synthèse	120
§ 6. Fonctions de la classe A satisfaisant la synthèse	121
§ 7. Ensemble de synthèse harmonique	123
§ 8. Ensembles de synthèse harmonique (suite)	124
§ 9. Ensembles de synthèse harmonique (fin). Ensembles sans vraie pseudomesure	125
CHAPITRE X. Fonctions de la classe A sur des ensembles linéaires. Cas des ensembles parfaits symétriques à rapport constant	128
§ 1. Un théorème de S. Bernstein	128
§ 2. Programme	130
§ 3. Condition suffisante pour que $A(\mathbb{T}) \cap \mathbb{E}$ soit contenue dans $A(\mathbb{E})$	131
§ 4. Condition nécessaire	134
§ 5. Un lemme	134
§ 6. Démonstration de la condition nécessaire	135
CHAPITRE XI. Fonctions de la classe A sur des ensembles linéaires (suite). Ensembles de Carleson et de Helson	139
§ 1. Définitions et programme	139
§ 2. Quelques espaces de Banach	139
§ 3. Lemmes. Critères pour qu'un ensemble soit ensemble de Helson ou de Carleson	140
§ 4. Un autre critère	143
§ 5. Identité des ensembles de Carleson et Helson	145
§ 6. Propriétés arithmétiques	146
§ 7. Remarque sur les ensembles indépendants	148
CHAPITRE XII. Zéros des fonctions à séries de Fourier rares ou lacunaires	149
§ 1. Définitions et problèmes	149
§ 2. Méthode d'Ingham	150
§ 3. Existence de fonctions à spectre donné s'annulant sur un ensemble	152
§ 4. Solution du premier problème	153
§ 5. Séries lacunaires et ensembles surradicaux	155
§ 6. Solution du second problème	157
§ 7. Complément	160
APPENDICE I. Hyperdistributions	161
§ 1. Hyperdistributions, support	161
§ 2. Approximation des hyperdistributions	162
§ 3. Convolution	162
§ 4. Cas particuliers	162

APPENDICE II. Pseudofonctions et pseudomesures	161
§ 1. Un schéma d'inclusion	161
§ 2. Fonctions de la classe A	161
§ 3. Produits scalaires, produits	161
§ 4. Convolutions	161
§ 5. Primitives doubles	166
§ 6. Critère de nullité	166
APPENDICE III. Fonctions de la classe A	168
§ 1. La classe A comme algèbre de Banach	168
§ 2. Propriété locale	168
§ 3. Théorème de Wiener	169
§ 4. Application	170
APPENDICE IV. Topologie faible des mesures et pseudomesures	174
§ 1. Descriptions des topologies	174
§ 2. Théorèmes classiques	174
§ 3. Complément	174
APPENDICE V. Théorèmes de Kronecker, Dirichlet et Minkowski	174
§ 1. Théorèmes du type de Kronecker	174
§ 2. Théorème de Dirichlet	174
§ 3. Théorème de Minkowski	175
APPENDICE VI. Nombres algébriques et entiers algébriques	184
NOTE SUR DES RECHERCHES RÉCENTES ET EN COURS	184
§ 1. Ensembles de Ditkin	184
§ 2. Ensembles de résolution spectrale	184
§ 3. Ensembles d'analyticité	184
§ 4. Une référence	184
INDEX TERMINOLOGIQUE ET DES NOTATIONS	184
BIBLIOGRAPHIE	186
NOTES ET COMPLÉMENTS	190
Notes sur les chapitres I et II	193
Ensembles parfaits symétriques et L-mesures	193
Ensembles parfaits homogènes, self-similarité	193
Ensembles parfaits de translation	193
Ensembles parfaits indépendants	193
Fractales, mesures et dimensions	193

Notes sur les chapitres III et IV	197
Capacités et mesures de Hausdorff	197
Capacités et divergences des séries trigonométriques	197
Comportement radial des fonctions harmoniques	197
Notes sur le chapitre V	199
Variations sur le problème de l'unicité	199
Le point de vue de Baire	200
Stabilité et instabilité	200
Le rôle des ensembles analytiques	201
Notes sur le chapitre VI	203
Etude des ensembles E_k quand $\theta \in S$	203
Notes sur le chapitre VII	205
Ensembles du type N_1 Dirichlet et Dirichlet faible	205
Ensembles N universels	206
Notes sur le chapitre VIII	207
Ensembles de multiplicité aléatoires	207
Ensembles de multiplicité « extrémaux »	208
Notes sur les chapitres IX et X	209
Les ensembles de synthèse harmonique	209
Les algèbres $A(F)$	210
Notes sur le chapitre XI	213
Les ensembles de Helson et la synthèse harmonique	213
Propriétés structurelles des ensembles de Helson	216
Ensembles de Helson dans $\mathbb{R}^n$	216
Ensembles AA^+	217
Notes sur le chapitre XII	219
Séries lacunaires	219
Sur les ensembles de Sidon, note de M. Stephen William DRURY	221
<i>Autour de l^2, par Thomas KÖRNER</i>	223
Références	230
Sur l'histoire de $M_c(\pi)$, par Russel LYONS	231
Références	235
TABLE DES MATIÈRES	239