

Armando Chieffini

**Manuale per
la preparazione
all'esame orale
di matematica**

editoriale
Veschi 
MILANO 1992

Prefazione	Pag.	3
Bibliografia essenziale	*	3

Parte Prima

ARITMETICA ED ALGEBRA

Libro Primo

I CORPI NUMERICI

Capitolo I: Elementi della teoria degli insiemi	*	11
§1 - Generalità e definizioni fondamentali - Potenza di un insieme	*	11
§2 - Operazioni tra insiemi	*	17
§3 - Relazioni e mappe - Insieme quoziente	*	18
§4 - Strutture algebriche fondamentali: Gruppi, anelli e corpi	*	22
Appendici al Capitolo I:	*	28
I) I numeri transfiniti - Paradoxi e antinomie	*	28
II) Elementi di logica matematica - Il calcolo delle proposizioni	*	40
§1 - Considerazioni generali	*	40
§2 - Il calcolo delle proposizioni	*	42
§3 - Descrizione dei connettivi binari e loro espressione mediante i tre connettivi fondamentali $\neg$, $\vee$, $\wedge$	*	43
§4 - Calcolo delle espressioni logiche e proprietà fondamentali dei connettivi	*	51
§5 - Ulteriori proprietà dei connettivi logici	*	53
§6 - Forme normali delle espressioni logiche	*	56
§7 - Alcuni teoremi di logica matematica	*	57
Capitolo II: L'insieme $\mathcal{N}$ dei numeri naturali	*	62
§1 - Generalità sull'introduzione dei numeri naturali	*	62
§2 - Il metodo di Cantor-Russel	*	63
§3 - I numeri ordinali	*	64
§4 - L'aritmetica dei numeri naturali: Le operazioni dirette	*	66
§5 - L'aritmetica dei numeri naturali: Le operazioni inverse	*	79

§ 6 - L'aritmetica dei numeri naturali: Potenza ed estrazione di radice	Pag.	73
§ 7 - Il metodo assiomatico di Peano e le modifiche del Padoa e del Pieri	"	74
Capitolo III: L'insieme Q^+ dei numeri razionali assoluti	"	79
§ 1 - Considerazioni generali	"	79
§ 2 - I numeri razionali assoluti come classi di equivalenza di coppie ordinate di numeri naturali	"	80
§ 3 - Il sottoinsieme Q_0 dei razionali interi ed il suo isomorfismo con l'insieme N dei numeri naturali	"	83
§ 4 - L'aritmetica dei numeri razionali assoluti: Le operazioni dirette	"	84
§ 5 - Proprietà formali dell'addizione e della moltiplicazione in Q^+	"	87
§ 6 - L'aritmetica dei numeri razionali assoluti: Sottrazione e divisione	"	89
§ 7 - La struttura dell'insieme Q^+ dei razionali assoluti	"	91
§ 8 - Cenno su altri metodi aritmetici per l'introduzione dei numeri razionali assoluti	"	93
§ 9 - Il metodo geometrico di Mignosi	"	94
Capitolo IV: L'insieme Q dei razionali relativi	"	101
§ 1 - Definizione dell'insieme Q dei numeri razionali relativi come classi di equivalenza di coppie ordinate di numeri razionali assoluti	"	101
§ 2 - Il sottoinsieme Q_+ dei razionali positivi e il loro isomorfismo con l'insieme Q^+ dei razionali assoluti	"	106
§ 3 - L'aritmetica dei numeri razionali relativi: Addizione e moltiplicazione	"	107
§ 4 - L'aritmetica dei numeri razionali relativi: Sottrazione e divisione	"	110
§ 5 - La struttura dell'insieme Q dei razionali relativi	"	112
Capitolo V: Cenni sulla teoria dei numeri e sull'analisi indeterminata di primo grado - L'equazione pitagorica	"	116
§ 1 - Nozioni preliminari - Il m.c.d. e il m.c.m. di due o più numeri	"	116
§ 2 - L'indicatore $\phi(n)$ di Gauss	"	120
§ 3 - Congruenze - L'insieme dei resti, modulo n	"	122
§ 4 - I teoremi di Fermat, Eulero, Wilson	"	127
§ 5 - Il gaussiano (n, a) del numero n rispetto alla base a	"	129
§ 6 - Criteri di divisibilità nel sistema decimale	"	133
§ 7 - Cenno sulla risoluzione delle congruenze di 1° grado	"	134
§ 8 - Analisi indeterminata di 1° grado in due incognite	"	136
§ 9 - Determinazione di una soluzione intera dell'equazione $ax+by=c$	"	138
§ 10 - Analisi indeterminata di 1° grado in più di due incognite	"	141
§ 11 - L'equazione pitagorica	"	143
§ 12 - Il problema di Fermat (cenni)	"	146
Capitolo VI: L'insieme R dei reali	"	148
§ 1 - Considerazioni generali	"	148
A) I numeri reali per via aritmetica	"	148
§ 2 - I numeri reali come classi di equivalenza di successioni di Cauchy	"	148
§ 3 - Le principali proprietà delle successioni di Cauchy	"	153
§ 4 - L'insieme R dei numeri reali e il sottoinsieme R_+ dei reali razionali	"	156
§ 5 - L'aritmetica dei numeri reali	"	158

§ 6 - Il metodo di Dedekind delle sezioni nel corpo razionale	Pag. 161
§ 7 - L'aritmetica dei numeri reali, definiti mediante sezioni nel corpo dei razionali	• 163
§ 8 - Altri metodi sperimentalmente per l'introduzione dei numeri reali:	• 169
I) <i>Il metodo delle coppie di classi contigue e delle coppie di successioni convergenti</i>	• 169
II) <i>Il metodo di Peano-Russel del segmento numerico</i>	• 171
III) <i>Il metodo degli aggregati additivi convergenti di Weierstrass</i>	• 174
IV) <i>I numeri reali come allineamenti decimali illimitati</i>	• 175
§ 9 - Ulteriori considerazioni didattiche sull'introduzione dei numeri reali in riferimento ai metodi sopra descritti e definizione geometrica delle operazioni su di essi	• 177
B) <i>I numeri reali per via geometrica</i>	• 183
§ 10 - La classe minore e la teoria della misura	• 183
§ 11 - La teoria sintetica dei numeri reali secondo Euclide	• 185
§ 12 - Il metodo assiomatico di Hilbert	• 188
Appendici al Capitolo VI:	• 191
I) <i>Cenni sul calcolo numerico approssimato</i>	• 191
II) <i>I numeri p-adici come esempio di numeri non archimedei</i>	• 197
III) <i>Le funzioni continue</i>	• 201
Capitolo VII: L'insieme C dei numeri complessi	• 209
§ 1 - Generalità sull'introduzione dei numeri complessi	• 209
§ 2 - I numeri complessi come elementi di un insieme complesso di resti, modulo $m(x) = x^2 + 1$, sull'anello dei polinomi	• 210
§ 3 - L'introduzione geometrica dei numeri complessi	• 216
§ 4 - L'aritmetica dei numeri complessi per via geometrica	• 218
§ 5 - L'introduzione algebrica dei numeri complessi secondo Gauss	• 223
§ 6 - Alcune considerazioni complementari sulla definizione di prodotto, secondo Gauss	• 227

Libro Secondo

POTENZE - ESPONENZIALI E LOGARITMI NEL CORPO REALE E NEL CORPO COMPLESSO

Capitolo VIII: Potenza con esponente reale - L'equazione esponenziale e i logaritmi nel corpo dei reali	• 233
§ 1 - Definizione di potenza con esponente razionale	• 235
§ 2 - La potenza con esponente reale	• 236
§ 3 - L'equazione esponenziale e la definizione di logaritmo nel corpo dei reali	• 237

Capitolo IX: Potenze e radici nel corpo dei complessi	Pag.	240
§ 1 - La formula di Moivre	»	240
§ 2 - Le radici n-esime dell'unità	»	241
§ 3 - Potenze nel campo complesso - Le formule di Eulero - Le funzioni iperboliche	»	244
§ 4 - I logaritmi a base reale dei numeri complessi	»	248
§ 5 - Potenze e logaritmi a base complessa	»	249
§ 6 - Le funzioni inverse delle funzioni circolari ed iperboliche nel corpo complesso	»	250

Libro Terzo

COMPLEMENTI DI GEOMETRIA ED ALGEBRA

Capitolo X: Sviluppi in serie e calcoli numerici su di essi	»	255
§ 1 - Generalità e richiami della teoria generale delle serie	»	255
§ 2 - Serie di funzioni e serie di potenze	»	259
§ 3 - Sviluppi in serie di Mac-Laurin di particolari funzioni	»	265
§ 4 - Altre applicazioni numeriche dei precedenti sviluppi in serie	»	272
A) La costante di Eulero-Mascheroni	»	272
B) Il calcolo di π	»	274
§ 5 - Calcolo numerico delle serie	»	276
Appendice al Capitolo X: Cenni sulle serie e sull'integrale di Fourier	»	281
§ 1 - Generalità - Criteri per la sviluppabilità in serie di Fourier	»	281
§ 2 - Trasformazioni della serie di Fourier	»	290
§ 3 - L'integrale di Fourier	»	291
Capitolo XI: Le equazioni di terzo e quarto grado	»	293
§ 1 - Risoluzione delle equazioni di 3° grado secondo il metodo di Scipione del Ferro	»	293
§ 2 - Risoluzione delle equazioni di 4° grado secondo il metodo di Ferrari	»	296
Capitolo XII: Il teorema fondamentale dell'Algebra e sue applicazioni	»	299
§ 1 - Il teorema di D'Alembert	»	299
§ 2 - Applicazioni del teorema fondamentale	»	302
Capitolo XIII: Discriminante di un'equazione algebrica e risultante di due equazioni algebriche	»	307
§ 1 - Discriminante di un'equazione algebrica	»	307
§ 2 - Risultante di due equazioni algebriche	»	308
§ 3 - Sistemi di due equazioni algebriche in due incognite - Cenni sul teorema di Bezout	»	312

Capitolo XIV: Numeri algebrici e trascendenti - La trascendenza di e e di π	Pag.	315
§ 1 - Proprietà fondamentali dei numeri algebrici	»	315
§ 2 - Il teorema di Lindemann - La trascendenza di e e di π	»	319
Capitolo XV: Cenni sulla teoria dei gruppi finiti di sostituzione e delle equazioni algebriche secondo Galois	»	326
§ 1 - Concetto di sostituzione e prime proprietà	»	326
§ 2 - Gruppi di sostituzioni - Sottogruppi invarianti - Teoremi di Jordan e di Hölder	»	331
§ 3 - Gruppi transitivi ed intransitivi - Gruppi primitivi ed imprimitivi	»	335
§ 4 - La risolvente di Galois di una data equazione algebrica	»	337
§ 5 - Il gruppo di Galois per una data equazione algebrica - Proprietà fondamentali	»	339
§ 6 - La risolubilità delle equazioni algebriche per radicali - Il teorema di Ruffini	»	341
§ 7 - Applicazioni della teoria di Galois:	»	342
A) <i>Risoluzione delle equazioni di 3° e 4° grado secondo Lagrange</i>	»	342
B) <i>L'equazione della ciclotomia</i>	»	346
Capitolo XVI: Cenni sulla programmazione lineare	»	349
§ 1 - Generalità	»	349
§ 2 - Sistemi di disequazioni in due o più variabili - Esistenze convessi	»	351
§ 3 - Il metodo del semplice	»	358

Parte Seconda

GEOMETRIA E COMPLEMENTI

Libro Quarto

EQUAGLIANZA E SIMILITUDINE - EQUIVALENZA DELLE FIGURE GEOMETRICHE

Capitolo XVII: L'uguaglianza in geometria secondo il programma di Klein	»	365
§ 1 - Considerazioni generali	»	365
§ 2 - Esame dei vari metodi adottati in geometria elementare per definire l'uguaglianza tra figure	»	371
§ 3 - Ulteriori considerazioni sulla teoria dell'uguaglianza:	»	383
A) <i>L'uguaglianza tra piani sovrapposti: L'uguaglianza diretta o congruenza</i>	»	384
B) <i>L'uguaglianza tra piani sovrapposti: L'uguaglianza inversa</i>	»	387
C) <i>L'uguaglianza dal punto di vista analitico</i>	»	391
D) <i>L'uguaglianza tra spazi sovrapposti - L'uguaglianza diretta e inversa</i>	»	394

Capitolo XVIII: La similitudine nel piano e nello spazio	Pag.	358
§1 - La similitudine tra piani dal punto di vista elementare	»	358
§2 - La similitudine tra spazi dal punto di vista elementare (convi)	»	407
§3 - La trattazione analitica delle similitudini:	»	409
A) <i>Similitudine tra rette</i>	»	409
B) <i>Similitudine tra piani</i>	»	411
C) <i>Similitudine tra spazi (convi)</i>	»	417
Capitolo XIX: L'equivalenza nel piano e nello spazio	»	423
§1 - Considerazioni generali	»	423
§2 - L'equivalenza dei poligoni piani ed il principio di De Zolt	»	425
§3 - La dimostrazione del principio di De Zolt:	»	426
A) <i>La teoria dell'equivalenza secondo Schur</i>	»	426
B) <i>La teoria dell'equivalenza secondo Veronese</i>	»	430
C) <i>La teoria dell'equivalenza secondo Hilbert</i>	»	432
§4 - L'equivalenza delle figure piane a contorno curvilineo - Il teorema di Bolyai	»	434
§5 - L'equivalenza di alcune figure spaziali:	»	436
A) <i>Poligoni sferici</i>	»	436
B) <i>Prismi</i>	»	437
§6 - Il principio fondamentale delle figure poliedriche	»	438
§7 - Il teorema di Dehn	»	441
Capitolo XX: Il postulato della continuità	»	450
§1 - Premessa storica	»	450
§2 - Il postulato della continuità secondo Dedekind ed alcune sue applicazioni elementari:	»	451
A) <i>Divisibilità di un segmento in n parti uguali</i>	»	452
B) <i>Classi di grandezze continue</i>	»	452
C) <i>Dimostrazione del postulato di Eudosso-Archimede</i>	»	453
D) <i>Dimostrazione del postulato della circonferenza</i>	»	454
§3 - Il postulato della continuità secondo Cantor - Corsivi non archimedei	»	455
Capitolo XXI: Il 5° postulato di Euclide e le geometrie non euclidee	»	459
§1 - Impostazione del problema	»	459
§2 - Altre formulazioni del 5° postulato di Euclide	»	461
§3 - L'indipendenza del 5° postulato dai primi quattro - Il modello di Klein	»	465
§4 - L'opera di Gerolamo Giovanni Saccheri	»	472
§5 - I successori di Saccheri sino al Lobatsewski:	»	480
A) <i>Il contributo di Lambert</i>	»	481
B) <i>Il contributo di Legendre</i>	»	482
C) <i>I lavori di Schaefer e di Taurinus - Il contributo di Gauss</i>	»	485
§6 - L'opera di Lobatsewski e di Bolyai	»	490
§7 - La teoria delle rette parallele dal punto di vista della geometria differenziale - La geometria ellittica	»	504
§8 - La teoria delle rette parallele dal punto di vista della geometria proiettiva: (convi)	»	512

Libro Quinto

COMPLEMENTI DI GEOMETRIA

Capitolo XXII: Proporzioni geometriche e teoria della misura	Pag.	519
§ 1 - Definizione di proporzione	»	519
§ 2 - Le proprietà fondamentali della teoria della misura e l'Algoritmo di Euclide:	»	521
A) <i>Alcune proprietà della teoria della misura</i>	»	521
B) <i>L'Algoritmo di Euclide</i>	»	523
C) <i>Il metodo di esaurimento</i>	»	525
§ 3 - Il « metodo meccanico » di Archimede	»	531
§ 4 - La geometria degli indivisibili:	»	536
A) <i>Il principio di Cavalieri</i>	»	536
B) <i>Il principio di Torricelli</i>	»	538
§ 5 - Lunghezze ed aree secondo Minkowsky	»	540
Capitolo XXIII: Metodi sintetici per la risoluzione dei problemi geometrici elementari	»	544
§ 1 - Generalità	»	544
§ 2 - Alcuni metodi per la risoluzione dei problemi geometrici elementari:	»	548
A) <i>Il metodo dei luoghi geometrici</i>	»	548
B) <i>Il metodo della trasformazione delle figure</i>	»	556
C) <i>L'inversione per raggi vettori reciproci</i>	»	565
§ 3 - La geometria del compasso - Il teorema di Mascheroni	»	571
Appendici al Capitolo XXIII:	»	575
I) <i>Costruzione di espressioni appartenenti ad un dato campo di razionalità K e al relativo campo euclideo</i>	»	575
II) <i>La risoluzione geometrica delle equazioni di 2° grado</i>	»	580
III) <i>Esempi di risoluzione geometrica di alcuni problemi di 2° grado</i>	»	584
Capitolo XXIV: I problemi classici dell'antichità	»	587
§ 1 - Considerazioni generali	»	587
§ 2 - Risoluzione geometrica dei problemi di 3° e 4° grado	»	588
A) <i>Problemi di terzo grado</i>	»	588
B) <i>Problemi di quarto grado</i>	»	591
§ 3 - I problemi classici dell'antichità:	»	592
A) <i>Duplicazione del cubo</i>	»	593
B) <i>Trisezione dell'angolo</i>	»	596
C) <i>Rettificazione della circonferenza e quadratura del cerchio</i>	»	601
D) <i>Il problema della ciclotomia</i>	»	604
		645

COMPLEMENTI

Complemento 1° - Gli elementi immaginari in geometria analitica	Pag. 609
§ 1 - Punti e rette immaginarie	» 609
§ 2 - Le rette isotrope e i punti ciclici di un piano	» 613
§ 3 - Gli elementi impropri nello spazio	» 617
 Complemento 2° - Sistemi lineari di circonferenze e sfere	 » 620
§ 1 - Richiamo di alcune proprietà geometriche	» 620
§ 2 - Fasci di circonferenze	» 624
§ 3 - Sistemi di sfere (cenni)	» 634