

CIRO CILIBERTO

ALGEBRA LINEARE



BOLLATI BORINGHIERI

Indice

Prefazione

xi

1	Vettori geometrici	3
1	Definizione di vettore geometrico, 3	
2	Operazioni tra vettori geometrici e loro proprietà, 5	
	APPENDICI E COMPLEMENTI	
3	Corrispondenze e relazioni, 9	
4	Funzioni, 11	
5	Relazioni di equivalenza, 12	
6	Relazioni d'ordine, 14	
7	Operazioni e strutture algebriche, 15	
8	Anelli e campi, 16	
9	Omomorfismi tra anelli, 20	
2	La nozione di spazio vettoriale	21
1	La definizione di spazio vettoriale, 21	
2	Prime proprietà degli spazi vettoriali, 23	
3	La nozione di combinazione lineare, 25	
	APPENDICI E COMPLEMENTI	
4	Generalità sulle permutazioni in un insieme, 26	
5	Ragionamento per induzione, 27	
3	Esempi di spazi vettoriali	29
1	Vettori e matrici, 29	
	APPENDICI E COMPLEMENTI	
2	Sottocampi di un campo, 35	
3	La caratteristica di un campo, 37	
4	La nozione di famiglia, 37	
4	Sottospazi di uno spazio vettoriale e generalità sui sistemi lineari	38
1	La nozione di sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale, 38	
2	Alcuni esempi di sottospazi di uno spazio vettoriale, 40	

3	Sistemi lineari e sottospazi dello spazio dei vettori numerici, 44	
	APPENDICI E COMPLEMENTI	
4	Polinomi su un campo, 48	
5	Dipendenza lineare di un vettore da un sistema	51
1	Sistemi di vettori e dipendenza lineare, 51	
2	Sottospazi generati da un sistema o da un insieme di vettori, 55	
3	Dipendenza lineare tra vettori numerici e un criterio di compatibilità per i sistemi lineari, 60	
	APPENDICI E COMPLEMENTI	
4	Sistemi di elementi di un insieme, 61	
6	Dipendenza e indipendenza lineare di sistemi di vettori	63
1	Le nozioni di dipendenza e indipendenza lineare, 63	
2	Alcune proposizioni sulla dipendenza e indipendenza lineare, 68	
3	Il teorema di Steinitz, 70	
4	Sistemi massimi di vettori linearmente indipendenti, 71	
5	Basi di uno spazio vettoriale e la nozione di dimensione, 74	
6	Riferimenti di uno spazio vettoriale, 77	
	APPENDICI E COMPLEMENTI	
7	Spazi vettoriali di dimensione infinita, 79	
8	Qualche cenno di calcolo combinatorio, 80	
9	Elementi algebrici e trascendenti su un campo, 82	
7	Applicazioni dei risultati sulla dipendenza e indipendenza lineare	83
1	La nozione di rango di una matrice, 83	
2	Matrici subordinate a una data matrice e loro rango, 85	
3	Teoria dei sistemi lineari: teoremi di esistenza e unicità per le soluzioni, 86	
4	Il caso dei sistemi omogenei, 90	
5	Sistemi lineari equivalenti, 91	
6	La formula di Grassmann, 96	
7	Somme dirette, 98	
8	L'algoritmo di Gauss	103
1	Trasformazioni elementari di sistemi di vettori, 103	
2	L'algoritmo di Gauss, 105	
3	Riduzione di una matrice nella forma a scalini, 110	
4	Il metodo di eliminazione di Gauss per la risoluzione dei sistemi lineari, 114	
9	Applicazioni lineari	118
1	Applicazioni lineari: definizione ed esempi, 118	
2	Nucleo, immagine e rango di una applicazione lineare, 123	
3	Applicazioni lineari determinate dai loro valori sugli elementi di una base, 129	

10	Prodotto tra matrici e applicazioni lineari tra spazi di vettori numerici	133
1	Prodotto tra matrici, 133	
2	Omomorfismi tra spazi di vettori numerici, 138	
3	Prodotto tra matrici e algoritmo di Gauss, 144	
4	Matrice di una applicazione lineare, 147	
5	Cambiamenti di riferimento, 150	
6	Rango del prodotto di due matrici, 153	
	APPENDICI E COMPLEMENTI	
7	Matrici centrali, 156	
8	Equivalenza tra matrici, 156	
9	Reinterpretazione di alcuni risultati sui sistemi lineari, 159	
10	La nozione di gruppo, 161	
11	Il gruppo delle permutazioni, 164	
12	Proprietà degli elementi di S_n , 164	
13	Trasposizioni, 165	
14	Rappresentazione di S_n come sottogruppo di $Gl(n, K)$, 166	
11	Spazi quoziente e teoremi di omomorfismo	169
1	Spazi quoziente, 169	
2	Il primo teorema di omomorfismo, 172	
3	Il secondo teorema di omomorfismo, 173	
4	I sottospazi di uno spazio quoziente, 174	
5	Somme dirette e spazi quozienti, 175	
12	Spazi vettoriali di applicazioni lineari e spazio duale	177
1	Lo spazio vettoriale degli omomorfismi tra due spazi vettoriali, 177	
2	L'anello degli endomorfismi di uno spazio vettoriale, 180	
3	Spazio duale di uno spazio vettoriale, 181	
4	Lo spazio biduale, 182	
5	Principio di dualità per gli spazi vettoriali, 184	
6	Trasposta di una applicazione lineare, 187	
7	Matrici di applicazioni trasposte, 190	
	APPENDICI E COMPLEMENTI	
8	Osservazioni sulla composizione di applicazioni lineari, 192	
9	Osservazioni sul biduale di uno spazio vettoriale non finitamente generato, 194	
10	Dualità e sistemi lineari, 195	
11	Complessificazione di uno spazio vettoriale reale, 198	
12	Ampliamento del campo degli scalari, 201	
13	Il linguaggio geometrico	204
1	Sottospazi affini di uno spazio vettoriale, 204	
2	Affinità, 206	
3	Spazio affine numerico, 207	
4	Equazioni cartesiane e parametriche di un sottospazio affine di $M(n, 1, K)$, 209	
5	Applicazioni affini tra spazi di vettori numerici, 214	
6	Riferimenti affini, 216	
7	Cenni di geometria affine, 217	

- 8 Spazio proiettivo associato ad uno spazio vettoriale, 220
- 9 Sottospazi di uno spazio proiettivo, 220
- 10 Proiettività, 222
- 11 Spazio proiettivo duale, 223

- 14 Applicazioni multilineari e determinanti 225
 - 1 Applicazioni multilineari, 225
 - 2 Alcune proprietà delle applicazioni multilineari alternanti, 228
 - 3 Determinante di una matrice quadrata su un campo, 232
 - 4 Teorema di Laplace, 239
 - 5 Teorema di Binet, 245
 - APPENDICI E COMPLEMENTI
 - 6 Osservazioni sulle applicazioni multilineari alternanti, 248
 - 7 Orientazioni in uno spazio vettoriale reale, 250
 - 8 Alcune proprietà dei determinanti; determinanti di matrici antisimmetriche, hermitiane e antihermitiane, 250

- 15 Determinazione del rango di una matrice e risoluzione dei sistemi lineari con l'uso dei determinanti 253
 - 1 Il teorema degli orlati, 253
 - 2 Risoluzione dei sistemi lineari con l'uso dei determinanti, 257
 - 3 L'algoritmo degli orlati per le matrici simmetriche, 262
 - APPENDICI E COMPLEMENTI
 - 4 Matrici aggiunte, 264

- 16 Endomorfismi di uno spazio vettoriale: il problema della diagonalizzazione 267
 - 1 Sottospazi invarianti per un endomorfismo, 267
 - 2 Autovalori e autovettori, 269
 - 3 Il polinomio caratteristico, 271
 - 4 Diagonalizzazione di endomorfismi, 276
 - 5 Triangolazione di endomorfismi, 280
 - 6 Il teorema di Hamilton-Cayley, 283
 - APPENDICI E COMPLEMENTI
 - 7 Il lemma di Schur, 285
 - 8 Coniugio tra matrici, 287
 - 9 Sui coefficienti del polinomio caratteristico, 288
 - 10 Polinomio minimo di una matrice, 291
 - 11 Anello dei polinomi su un campo, 294
 - 12 Fattorizzazione di polinomi, 295
 - 13 Ideali nell'anello dei polinomi, 298
 - 14 Radici di un polinomio, 300
 - 15 Derivate e formula di Taylor, 302
 - 16 Polinomi complessi e coniugio, 304

- 17 Endomorfismi di uno spazio vettoriale: la forma canonica di Jordan 306
 - 1 Endomorfismi nilpotenti, 306

2	Radici di un endomorfismo, 312	
3	Forma canonica di Jordan, 315	
	APPENDICI E COMPLEMENTI	
4	Forma canonica di endomorfismi di spazi vettoriali reali, 319	
5	Ancora sul polinomio minimo di una matrice, 325	
6	Forma canonica razionale, 327	
18	Prodotti scalari e hermitiani e forme quadratiche	336
1	Prodotti scalari, 336	
2	Prodotto scalare tra vettori geometrici, 340	
3	Omomorfismi metrici, 342	
4	Matrice di una forma bilineare in un riferimento, 344	
5	Cambiamenti di riferimento e rango di una forma bilineare, 350	
6	Forme hermitiane, 353	
7	Matrice di una forma hermitiana in un riferimento, 355	
	APPENDICI E COMPLEMENTI	
8	Ancora su forme sesquilineari, hermitiane e antihermitiane, 359	
19	Ortogonalità rispetto a un prodotto scalare	362
1	La nozione di ortogonalità, 362	
2	Decomposizioni ortogonali, 365	
3	Forme bilineari e dualità, 368	
4	Vettori isotropi, 372	
5	Esistenza di basi ortogonali, 376	
6	Il caso reale, 378	
7	Il caso hermitiano, 381	
	APPENDICI E COMPLEMENTI	
8	Forme bilineari antisimmetriche, 383	
9	Il teorema di Witt, 385	
10	Isometria tra matrici e riduzione a forma normale mediante l'algoritmo di Gauss, 389	
20	Procedimenti di ortogonalizzazione	392
1	Il procedimento di Gram-Schmidt, 392	
2	Il procedimento di Lagrange, 396	
3	Il teorema di Jacobi, 398	
4	Forme quadratiche reali: il criterio di Sylvester, 400	
5	Spazi euclidei, 405	
6	Il caso hermitiano, 409	
	APPENDICI E COMPLEMENTI	
7	L'algoritmo del completamento del quadrato, 409	
8	Cenni di geometria degli spazi euclidei, 411	
21	Il teorema di decomposizione spettrale	416
1	Endomorfismi aggiunti, 416	
2	Endomorfismi aggiunti: il caso hermitiano, 420	

3	Gruppi ortogonali e unitari, 423	
4	Il teorema di decomposizione spettrale, 428	
5	Endomorfismi ortogonalmente diagonalizzabili, 432	
6	Automorfismi di uno spazio euclideo o unitario, 438	
7	Diagonalizzazione ortogonale delle forme quadratiche, 443	
	APPENDICI E COMPLEMENTI	
8	Il teorema di decomposizione delle trasformazioni ortogonali, 446	
9	Il gruppo di Lorentz, 448	
10	Complementi su endomorfismi normali, 449	
11	Forma trigonometrica dei numeri complessi e sue applicazioni, 451	
12	Applicazioni geometriche: prodotto vettoriale, aree e volumi, 452	
22	Classificazione dei polinomi di secondo grado rispetto a sostituzioni lineari	458
1	Equivalenza di polinomi rispetto a sostituzioni lineari, 458	
2	Enunciato del teorema di classificazione e alcune sue conseguenze, 462	
3	La dimostrazione del teorema di classificazione, 470	
4	Riduzione a forma canonica per trasformazioni ortogonali, 476	
	APPENDICI E COMPLEMENTI	
5	Sull'equazione di una quadrica, 483	
6	Fattori lineari di un polinomio riducibile di secondo grado, 486	
23	Prodotti tensoriali	491
1	Alcune proprietà degli spazi di applicazioni multilineari, 491	
2	Definizione di prodotto tensoriale, 493	
3	Proprietà del prodotto tensoriale, 495	
4	Componenti di un tensore e cambiamenti di riferimento, 499	
5	Algebra tensoriale, 502	
6	Tensori simmetrici e tensori alternanti, 504	
	APPENDICI E COMPLEMENTI	
7	Tensori decomponibili, 512	
8	Complementi su tensori simmetrici e alternanti, 513	
9	Contrazione degli indici, 518	
10	La nozione di algebra, 519	
24	Cenni a questioni di complessità e metodi numerici	531
1	Complessità computazionale di alcuni algoritmi dell'algebra lineare, 532	
2	Cenno ai problemi di precisione, 538	
3	Un esempio di metodo iterativo, 540	
	<i>Nota bibliografica</i>	547
	<i>Indice analitico</i>	549