

**CIRO CILIBERTO**

# **ALGEBRA LINEARE**



**BOLLATI BORINGHERI**

*Prefazione*

<b>1</b>	<b>Vettori geometrici</b>	<b>3</b>
1	Definizione di vettore geometrico, 3	
2	Operazioni tra vettori geometrici e loro proprietà, 5	
	APPENDICI E COMPLEMENTI	
3	Corrispondenze e relazioni, 9	
4	Funzioni, 11	
5	Relazioni di equivalenza, 12	
6	Relazioni d'ordine, 14	
7	Operazioni e strutture algebriche, 15	
8	Anelli e campi, 16	
9	Omomorfismi tra anelli, 20	
<b>2</b>	<b>La nozione di spazio vettoriale</b>	<b>21</b>
1	La definizione di spazio vettoriale, 21	
2	Prime proprietà degli spazi vettoriali, 23	
3	La nozione di combinazione lineare, 25	
	APPENDICI E COMPLEMENTI	
4	Generalità sulle permutazioni in un insieme, 26	
5	Ragionamento per induzione, 27	
<b>3</b>	<b>Esempi di spazi vettoriali</b>	<b>29</b>
1	Vettori e matrici, 29	
	APPENDICI E COMPLEMENTI	
2	Sottocampi di un campo, 35	
3	La caratteristica di un campo, 37	
4	La nozione di famiglia, 37	
<b>4</b>	<b>Sottospazi di uno spazio vettoriale e generalità sui sistemi lineari</b>	<b>38</b>
1	La nozione di sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale, 38	
2	Alcuni esempi di sottospazi di uno spazio vettoriale, 40	

3	Sistemi lineari e sottospazi dello spazio dei vettori numerici, 44 APPENDICI E COMPLEMENTI	
4	Polinomi su un campo, 48	
<b>5</b>	<b>Dipendenza lineare di un vettore da un sistema</b>	<b>51</b>
1	Sistemi di vettori e dipendenza lineare, 51	
2	Sottospazi generati da un sistema o da un insieme di vettori, 55	
3	Dipendenza lineare tra vettori numerici e un criterio di compatibilità per i sistemi lineari, 60 APPENDICI E COMPLEMENTI	
4	Sistemi di elementi di un insieme, 61	
<b>6</b>	<b>Dipendenza e indipendenza lineare di sistemi di vettori</b>	<b>63</b>
1	Le nozioni di dipendenza e indipendenza lineare, 63	
2	Alcune proposizioni sulla dipendenza e indipendenza lineare, 68	
3	Il teorema di Steinitz, 70	
4	Sistemi massimi di vettori linearmente indipendenti, 71	
5	Basi di uno spazio vettoriale e la nozione di dimensione, 74	
6	Riferimenti di uno spazio vettoriale, 77 APPENDICI E COMPLEMENTI	
7	Spazi vettoriali di dimensione infinita, 79	
8	Qualche cenno di calcolo combinatorio, 80	
9	Elementi algebrici e trascendenti su un campo, 82	
<b>7</b>	<b>Applicazioni dei risultati sulla dipendenza e indipendenza lineare</b>	<b>83</b>
1	La nozione di rango di una matrice, 83	
2	Matrici subordinate a una data matrice e loro rango, 85	
3	Teoria dei sistemi lineari: teoremi di esistenza e unicità per le soluzioni, 86	
4	Il caso dei sistemi omogenei, 90	
5	Sistemi lineari equivalenti, 91	
6	La formula di Grassmann, 96	
7	Somme dirette, 98	
<b>8</b>	<b>L'algoritmo di Gauss</b>	<b>103</b>
1	Trasformazioni elementari di sistemi di vettori, 103	
2	L'algoritmo di Gauss, 105	
3	Riduzione di una matrice nella forma a scalini, 110	
4	Il metodo di eliminazione di Gauss per la risoluzione dei sistemi lineari, 114	
<b>9</b>	<b>Applicazioni lineari</b>	<b>118</b>
1	Applicazioni lineari: definizione ed esempi, 118	
2	Nucleo, immagine e rango di una applicazione lineare, 123	
3	Applicazioni lineari determinate dai loro valori sugli elementi di una base, 129	

<b>10 Prodotto tra matrici e applicazioni lineari tra spazi di vettori numerici</b>	<b>133</b>
1 Prodotto tra matrici, 133	
2 Omomorfismi tra spazi di vettori numerici, 138	
3 Prodotto tra matrici e algoritmo di Gauss, 144	
4 Matrice di una applicazione lineare, 147	
5 Cambiamenti di riferimento, 150	
6 Rango del prodotto di due matrici, 153	
APPENDICI E COMPLEMENTI	
7 Matrici centrali, 156	
8 Equivalenza tra matrici, 156	
9 Reinterpretazione di alcuni risultati sui sistemi Eneari, 159	
<b>10 La nozione di gruppo, 161</b>	
11 Il gruppo delle permutazioni, 164	
12 Proprietà degli elementi di $\mathbb{Z}_n$ , 164	
13 Trasposizioni, 165	
14 Rappresentazione di $\mathbb{Z}_n$ come sottogruppo di $\text{GL}(n, \mathbb{K})$ , 166	
<b>11 Spazi quoziante e teoremi di omomorfismo</b>	<b>169</b>
1 Spazi quoziante, 169	
2 Il primo teorema di omomorfismo, 172	
3 Il secondo teorema di omomorfismo, 173	
4 I sottospazi di uno spazio quoziante, 174	
5 Somme dirette e spazi quozianti, 175	
<b>12 Spazi vettoriali di applicazioni lineari e spazio duale</b>	<b>177</b>
1 Lo spazio vettoriale degli omomorfismi tra due spazi vettoriali, 177	
2 L'anello degli endomorfismi di uno spazio vettoriale, 180	
3 Spazio duale di uno spazio vettoriale, 181	
4 Lo spazio biduale, 182	
5 Princípio di dualità per gli spazi vettoriali, 184	
6 Trasposta di una applicazione lineare, 187	
7 Matrici di applicazioni trasposte, 190	
APPENDICI E COMPLEMENTI	
8 Osservazioni sulla composizione di applicazioni lineari, 192	
9 Osservazioni sul biduale di uno spazio vettoriale non finitamente generato, 194	
10 Dualità e sistemi lineari, 195	
11 Complessificazione di uno spazio vettoriale reale, 198	
12 Ampliamento del campo degli scalari, 201	
<b>13 Il linguaggio geometrico</b>	<b>204</b>
1 Sottospazi affini di uno spazio vettoriale, 204	
2 Affinità, 206	
3 Spazio affine numerico, 207	
4 Equazioni cartesiane e parametriche di un sottospazio affine di $M(n, 1, \mathbb{K})$ , 209	
5 Applicazioni affini tra spazi di vettori numerici, 214	
6 Riferimenti affini, 216	
7 Cenni di geometria affine, 217	

8	Spazio proiettivo associato ad uno spazio vettoriale, 220	
9	Sottospazi di uno spazio proiettivo, 220	
10	Proiettività, 222	
11	Spazio proiettivo duale, 223	
<b>14</b>	<b>Applicazioni multilineari e determinanti</b>	<b>225</b>
1	Applicazioni multilineari, 225	
2	Alcune proprietà delle applicazioni multilineari alternanti, 228	
3	Determinante di una matrice quadrata su un campo, 232	
4	Teorema di Laplace, 239	
5	Teorema di Binet, 245	
<b>APPENDICI E COMPLEMENTI</b>		
6	Osservazioni sulle applicazioni multilineari alternanti, 248	
7	Orientazioni in uno spazio vettoriale reale, 250	
8	Alcune proprietà dei determinanti; determinanti di matrici antisimmetriche, hermitiane e antiermitiane, 250	
<b>15</b>	<b>Determinazione del rango di una matrice e risoluzione dei sistemi lineari con l'uso dei determinanti</b>	<b>253</b>
1	Il teorema degli orlati, 253	
2	Risoluzione dei sistemi lineari con l'uso dei determinanti, 257	
3	L'algoritmo degli orlati per le matrici simmetriche, 262	
<b>APPENDICI E COMPLEMENTI</b>		
4	Matrici aggiunte, 264	
<b>16</b>	<b>Endomorfismi di uno spazio vettoriale: il problema della diagonalizzazione</b>	<b>267</b>
1	Sottospazi invarianti per un endomorfismo, 267	
2	Autovalori e autovettori, 269	
3	Il polinomio caratteristico, 271	
4	Diagonalizzazione di endomorfismi, 276	
5	Triangolazione di endomorfismi, 280	
6	Il teorema di Hamilton-Cayley, 283	
<b>APPENDICI E COMPLEMENTI</b>		
7	Il lemma di Schur, 285	
8	Coniugio tra matrici, 287	
9	Sui coefficienti del polinomio caratteristico, 288	
10	Polinomio minimo di una matrice, 291	
11	Anello dei polinomi su un campo, 294	
12	Fattorizzazione di polinomi, 295	
13	Ideali nell'anello dei polinomi, 298	
14	Radici di un polinomio, 300	
15	Derivate e formula di Taylor, 302	
16	Polinomi complessi e coniugio, 304	
<b>17</b>	<b>Endomorfismi di uno spazio vettoriale: la forma canonica di Jordan</b>	<b>306</b>
1	Endomorfismi nilpotenti, 306	

2	Radici di un endomorfismo, 312	
3	Forma canonica di Jordan, 315	
	<b>APPENDICI E COMPLEMENTI</b>	
4	Forma canonica di endomorfismi di spazi vettoriali reali, 319	
5	Ancora sul polinomio minimo di una matrice, 325	
6	Forma canonica razionale, 327	
<b>18</b>	<b>Prodotti scalari e hermitiani e forme quadratiche</b>	<b>336</b>
1	Prodotti scalari, 336	
2	Prodotto scalare tra vettori geometrici, 340	
3	Omomorfismi metrici, 342	
4	Matrice di una forma bilineare in un riferimento, 344	
5	Cambiamenti di riferimento e range di una forma bilineare, 350	
6	Forme hermitiane, 353	
7	Matrice di una forma hermitiana in un riferimento, 355	
	<b>APPENDICI E COMPLEMENTI</b>	
8	Ancora su forme sesquilineari, hermitiane e antiermitiane, 359	
<b>19</b>	<b>Ortogonalità rispetto a un prodotto scalare</b>	<b>362</b>
1	La nozione di ortogonalità, 362	
2	Decomposizioni ortogonali, 365	
3	Forme bilineari e dualità, 368	
4	Vettori isotropi, 372	
5	Esistenza di basi ortogonali, 376	
6	Il caso reale, 378	
7	Il caso hermitiano, 381	
	<b>APPENDICI E COMPLEMENTI</b>	
8	Forme bilineari antisimmetriche, 383	
9	Il teorema di Witt, 385	
10	Isometria tra matrici e riduzione a forma normale mediante l'algoritmo di Gauss, 389	
<b>20</b>	<b>Procedimenti di ortogonalizzazione</b>	<b>392</b>
1	Il procedimento di Gram-Schmidt, 392	
2	Il procedimento di Lagrange, 396	
3	Il teorema di Jacobi, 398	
4	Forme quadratiche reali: il criterio di Sylvester, 400	
5	Spazi euclidei, 405	
6	Il caso hermitiano, 409	
	<b>APPENDICI E COMPLEMENTI</b>	
7	L'algoritmo del completamento del quadrato, 409	
8	Cenni di geometria degli spazi euclidei, 411	
<b>21</b>	<b>Il teorema di decomposizione spettrale</b>	<b>416</b>
1	Endomorfismi aggiuntivi, 416	
2	Endomorfismi aggiuntivi: il caso hermitiano, 420	

3	Gruppi ortogonali e unitari, 423	
4	Il teorema di decomposizione spettrale, 428	
5	Endomorfismi ortogonalmente diagonalizzabili, 432	
6	Automorfismi di uno spazio euclideo o unitario, 438	
7	Diagonaizzazione ortogonale delle forme quadratiche, 443	
	APPENDICI E COMPLEMENTI	
8	Il teorema di decomposizione delle trasformazioni ortogonali, 446	
9	Il gruppo di Lorentz, 448	
10	Complementi su endomorfismi normali, 449	
11	Forma trigonometrica dei numeri complessi e sue applicazioni, 451	
12	Applicazioni geometriche: prodotto vettoriale, aree e volumi, 452	
<b>22</b>	<b>Classificazione dei polinomi di secondo grado rispetto a sostituzioni lineari</b>	<b>458</b>
1	Equivalenza di polinomi rispetto a sostituzioni lineari, 458	
2	Enunciato del teorema di classificazione e alcune sue conseguenze, 462	
3	La dimostrazione del teorema di classificazione, 470	
4	Riduzione a forma canonica per trasformazioni ortogonali, 476	
	APPENDICI E COMPLEMENTI	
5	Sull'equazione di una quadrica, 483	
6	Fattori lineari di un polinomio riducibile di secondo grado, 486	
<b>23</b>	<b>Prodotti tensoriali</b>	<b>491</b>
1	Alcune proprietà degli spazi di applicazioni multilinear, 491	
2	Definizione di prodotto tensoriale, 493	
3	Proprietà del prodotto tensoriale, 495	
4	Componenti di un tensore e cambiamenti di riferimento, 499	
5	Algebra tensoriale, 502	
6	Tensori simmetrici e tensori alternanti, 504	
	APPENDICI E COMPLEMENTI	
7	Tensori decomponibili, 512	
8	Complementi su tensori simmetrici e alternanti, 513	
9	Contrazione degli indici, 518	
10	La nozione di algebra, 519	
<b>24</b>	<b>Cenni a questioni di complessità e metodi numerici</b>	<b>531</b>
1	Complessità computazionale di alcuni algoritmi dell'algebra lineare, 532	
2	Cenno ai problemi di precisione, 538	
3	Un esempio di metodo iterativo, 540	
	<i>Nota bibliografica</i>	
	<i>Indice analitico</i>	
		<b>547</b>
		<b>549</b>