

CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE
MONOGRAFIE MATEMATICHE

2.

ANDRÉ LICHNEROWICZ

THÉORIE GLOBALE
DES CONNEXIONS ET
DES GROUPES
D'HOLONOMIE



EDIZIONI CREMONESE
ROMA

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE I.

NOTIONS GÉNÉRALES SUR LES VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES

I —	VARIÉTÉ DIFFÉRENTIABLE	p.	1
	1. Atlas — Variété différentiable	•	1
	2. Fonction scalaire définie dans une variété	•	3
	3. Application de classe C^r	•	3
	4. Espaces vectoriels tangents en un point	•	4
	5. Repères et corepères	•	5
	6. Pseudoscalaires, orientations, tenseurs dans une variété différentiable	•	8
	7. Notion d'espace fibré différentiable	•	10
	8. Les espaces fibrés attachés à une variété différentiable	•	12
	9. Variétés riemanniennes. Théorème de Whitney	•	15
	10. Images par une application	•	18
II. —	FORMES DIFFÉRENTIELLES EXTÉRIEURES	•	19
	11. Le tenseur de Kronecker	•	19
	12. L'espace des q -formes $A_x^{(q)}$	•	21
	13. Le produit extérieur	•	22
	14. Produit extérieur de q -formes linéaires. Expression et valeur d'une q -forme	•	24
	15. Deux résultats relatifs aux produits extérieurs de formes linéaires	•	26

16. Réduction d'une forme quadratique extérieure	p.	27
17. Formes différentielles extérieures	"	29
18. Différentielle extérieure d'une q -forme	"	31
19. Image réciproque d'une forme par une application	"	39
20. Formes fermées — Étude locale	"	37
21. Systèmes de Pfaff. Théorème de Frobenius	"	39
III. — FORMES À VALEURS DANS UN ESPACE VECTORIEL	"	42
22. Notion de forme à valeurs dans un espace vectoriel	"	42
23. Différentielle extérieure d'une forme Φ	"	44
24. Cas où l'espace vectoriel admet une structure d'algèbre de Lie	"	45

CHAPITRE II.

CONNEXIONS INFINITÉSIMALES. CONNEXIONS LINÉAIRES

I. — NOTIONS SUR L'HOMOTOPIE	p.	47
25. Chemin — homotopie — groupe de Poincaré	"	47
26. Lemme de factorisation	"	51
II. — CONNEXION INFINITÉSIMALE SUR UN ESPACE FIBRÉ PRINCIPAL	"	54
27. Espace fibré principal et algèbre de Lie du groupe structural	"	54
28. Première définition d'une connexion infinitésimale sur K	"	56
29. Seconde définition d'une connexion infinitésimale	"	57
30. Développement	"	58
31. Sections locales	"	60
32. Groupes d'holonomie d'une connexion infinitésimale	"	62
33. Tenseurs et formes tensorielles sur K	"	66

34. Passage d'une connexion à une autre	p. 68
35. Différentielle absolue d'une g -forme. Courbure d'une connexion infinitésimale	» 68
36. Expression de la forme de courbure	» 70
III. — CONNEXIONS LINÉAIRES	» 72
37. Notion de connexion linéaire	» 72
38. Formules explicites	» 76
39. Différentielle absolue dans une connexion linéaire	» 78
40. Torsion d'une connexion linéaire	» 81
41. Courbure d'une connexion linéaire	» 82
42. Les identités de Bianchi pour une connexion linéaire	» 84
43. Formules explicites en repères quelconques et en coordonnées locales	» 85
44. Identité de Ricci	» 87
45. L'espace fibré des repères affines	» 88
46. Connexion affine associée à une connexion linéaire	» 91
47. Transports relativement à une connexion linéaire. Groupes d'holonomie	» 94
48. Image d'une connexion linéaire	» 97
49. Développement sur l'espace affine	» 98
50. Géodésiques	» 100
51. Notion de connexion euclidienne. Groupes d'holonomie	» 101
52. Connexion riemannienne	» 105
53. Propriétés de la connexion riemannienne	» 107

CHAPITRE III.

GROUPES D'HOLONOMIE ET COURBURE

I. — CAS GÉNÉRAL ET VARIÉTÉS À CONNEXION LINÉAIRE	p. 111
54. Transport d'un tenseur. Tenseur à dérivée covariante nulle	» 111
55. Groupe d'holonomie locale	» 113
56. Sections locales spéciales	» 117

57. Éléments de l'algèbre de Lie de \mathfrak{o}_1^*	p.	119
58. Éléments de l'algèbre de Lie de \mathfrak{g}_1^*	>	122
59. Cas d'une connexion infinitésimale sur un espace fibré principal	*	125
60. Groupe d'holonomie et courbure	*	128
61. Cas d'une connexion linéaire	*	131
62. Notion de groupe d'holonomie infinitésimale	>	132
63. Points singuliers pour l'holonomie infinitésimale	*	135
64. Points réguliers pour l'holonomie infinitésimale	*	137
65. Points singuliers pour l'holonomie locale	*	141
66. Composantes connexes d'holonomie de \mathcal{N}_0	*	147
67. Variété analytique réelle à dimension analytique	>	153
68. Étude du groupe $\mathfrak{o}_4(\mathbb{R}^n)$ dans le cas où $\mathfrak{p}_4(\mathbb{R}^n)$ est irréductible	>	145
II. — VARIÉTÉS RIEMANNIENNES — KRÖYERISCHETS	*	147
69. Groupes d'holonomie	*	147
70. Réductibilité d'une variété riemannienne	>	149
71. Complète réductibilité de \mathfrak{u}_4	*	152
72. Étude du groupe \mathfrak{o}_4	*	154
73. Étude du groupe \mathfrak{g}_3	*	158
74. Coordonnées normales géodésiques	*	160
75. Variétés riemanniennes complètes. Théorème de Georges de Rham	*	162
76. Le groupe \mathfrak{p}_4 pour une variété riemannienne com- plète	*	164

CHAPITRE IV.

FORMES HARMONIQUES ET FORMES À DÉRIVÉE
COVARIANTE NULLE

I. — ÉLÉMENTS SUR L'HOMOLOGIE	p.	164
77. Chaînes différentielles	*	169
78. Bord	*	171
79. Intégrale d'une forme. Formule de Stokes	*	172
80. Homologie sur les formes	>	175

II. — FORMES HARMONIQUES	p.	177
81. La forme élément de volume sur V_n	*	177
82. L'opérateur \star sur les p -formes	*	179
83. Les opérateurs δ et Δ	*	182
84. Le produit scalaire global sur une variété compacte et les formes harmoniques	*	185
85. Théorèmes fondamentaux sur les formes harmo- niques	*	187
III. — LES OPÉRATEURS DÉFINIS PAR UNE FORME SUR UNE VARIÉTÉ RIEMANNIENNE	*	189
86. Définition des opérateurs K_k	*	189
87. Relations entre K_k et K_{k-1}	*	191
88. Cas où F est à dérivée covariante nulle. Rela- tions avec d' et δ	*	194
89. Les opérateurs K_k et l'opérateur A	*	198
90. Exemple: cas où le degré de F est le double d'un nombre impair	*	199

CHAPITRE V.

VARIÉTÉS PRESQUE COMPLEXES
ET STRUCTURES SUBORDONNÉES

I. — STRUCTURE COMPLEXE SUR UN ESPACE VECTORIEL RÉEL	p.	201
91. Complexification d'un espace vectoriel réel	*	201
92. Structure complexe sur un espace réel T_{2n}	*	203
93. Bases de T_{2n} adaptées à une structure complexe de T_{2n}	*	205
94. Les opérateurs C et M sur les formes	*	207
II. — ESPACE VECTORIEL HERMITIEN	*	209
95. Notion d'espace vectoriel hermitien	*	209
96. Structure hermitienne subordonnée à une forme quadratique extérieure	*	211

XIV

97. Bases adaptées à une structure hermitienne	p. 213
98. Les opérateurs L et f pour un espace vectoriel hermitien	» 215
99. Décomposition de Hodge-Lepage pour g -forme	» 216

III. — STRUCTURES PRESQUE COMPLEXE ET STRUCTURES SUBORDONNÉES

100. Variété à structure analytique complexe	» 219
101. Variété à structure presque complexe	» 222
102. Torsion d'une structure presque complexe	» 224
103. Intégrabilité d'une structure presque complexe	» 225
104. Calcul du tenseur de torsion d'une structure presque complexe	» 227
105. Torsion presque complexe et champs de vecteurs	» 229
106. Structures presque hermitiennes	» 231

IV. — CONNEXIONS PRESQUE COMPLEXES

107. Connexions linéaires complexes	» 233
108. Notion de connexion presque complexe	» 234
109. Connexion linéaire réelle et connexion presque complexe	» 235
110. Torsion presque complexe et connexions	» 238
111. Connexions presque hermitiennes	» 239
112. Seconde connexion canonique d'une variété presque hermitienne	» 243
113. Cas des variétés hermitiennes et pseudohermitiennes	» 245
114. Cas des variétés pseudokähleriennes	» 247
115. Forme quadratique à dérivée covariante nulle sur une variété riemannienne	» 250
116. Variétés Kähleriennes	» 251
117. Exemples de variétés kähleriennes	» 254
118. Propriétés relatives aux groupes d'holonomie	» 255
119. Réductibilité des variétés pseudokähleriennes	» 261

V. — FORMES SUR LES VARIÉTÉS PSEUDOHERMITIENNES ET PSEUDOKÄHLERIENNES

120. Orthogonalité sur une variété presque hermitienne	» 266
121. Les opérateurs d' et d'' sur une variété pseudo-complexe	» 267

122. Les opérateurs δ' et δ'' sur une variété pseudo-hermitienne	p.	269
123. Des opérateurs \bar{M} , \bar{d} et $\bar{\delta}$ sur une variété pseudo-hermitienne	o	271
124. Opérateurs sur une variété pseudokählérienne	•	272
125. Propriétés globales des variétés pseudokählériennes compactes	•	274

BIBLIOGRAPHIE	•	279
-------------------------	---	-----