

Rached Mneimné

Frédéric Testard

**INTRODUCTION  
A LA THÉORIE DES  
GROUPES DE LIE CLASSIQUES**

---

*Hermann  
Paris*



*Collection  
Méthodes*

---

# Table des matières

## Introduction

	1
<b>1. Les premières propriétés des groupes <math>GL(n, K)</math> (<math>K = \mathbb{R}</math> ou <math>\mathbb{C}</math>)</b>	11
1.1. Introduction	11
1.2. Normes sur $M_n(K)$	11
1.3. La topologie de $GL(n, K)$	12
1.4. Densité de $GL(n, K)$ . Applications	14
1.5. Connexité	17
1.6. La décomposition polaire de $GL(n, \mathbb{R})$	18
1.7. La décomposition polaire dans $GL(n, \mathbb{C})$	20
Exercices	21
<b>2. Groupes topologiques opérant sur un ensemble. Application à l'étude de la topologie de <math>GL(n, K)</math></b>	27
2.1. Introduction	27
2.2. Groupes opérant sur un ensemble ; aspect algébrique	27
2.3. Groupes opérant sur un ensemble ; aspect topologique	28
2.4. Propriétés des groupes topologiques	30
2.5. Démonstration du théorème 2.3.2.	33
2.6. Applications	33
2.7. Etude d'ensembles de matrices définis par des conditions sur le polynôme minimal	37
2.8. Décompositions	44
Exercices	50
<b>3. La fonction exponentielle. Applications</b>	57
3.1. Introduction	57

3.2. Définition et premières propriétés	57
3.3. Inversion de l'exponentielle	58
3.4. Etude des sous-groupes fermés de $GL(n, K)$	64
3.5. Groupes pseudo-algébriques	71
3.6. Théorème de point fixe de Kakutani. Mesure de Haar sur un groupe compact	73
3.8. Groupes algébriques	77
3.8. Différentielle de l'exponentielle. Applications	78
3.9. Etoile d'un groupe linéaire réel relative à un plongement	84
3.10. Sous-algèbres de Cartan	89
Exercices	93
<b>4. Etude des groupes orthogonaux</b>	105
4.1. Introduction	105
4.2. Réduction de l'étude de $O(p, q)$ à celle de $O(n)$	105
4.3. Composante neutre de $O(p, q)$ ; le groupe orthochrone $SO_0(p, q)$	106
4.4. Rappels : homotopie et groupe fondamental	109
4.5. Le revêtement $SU(2) \rightarrow SO(3)$	125
4.6. Groupe fondamental de $SO(n)$	127
4.7. Algèbres de Clifford ; groupe des spineurs	129
4.8. Groupe fondamental de $O(p, q)$	136
4.9. Topologie et structure du groupe $SO(4)$	137
4.10. Structure différentiable de l'espace homogène $G/H$	143
Appendice 4.A. : Fibrations	155
Appendice 4.B. : Sous-groupes de Lie, sous-algèbres de Lie	166
Appendice 4.C. : La formule de Campbell-Hausdorff	171
Exercices	175
<b>5. Etude des groupes unitaires ; géométries réelle et symplectique associées</b>	185
5.1. Introduction	185
5.2. Etude de $U(n)$	185
5.3. Etude de $U(p, q)$	188
5.4. Un théorème de H. Weyl sur les fonctions analytiques sur $GL(n, \mathbb{C})$	189
5.5. Espaces vectoriels réels et complexes	192
5.6. Produits scalaire et symplectique associés à un produit hermitien	196
5.7. L'ensemble $H$ des structures hermitiennes associées à un espace symplectique	199

5.8. L'espace affine $L_F$	203
5.9. Structure de l'espace $\mathcal{L}(V)$ des lagrangiens de $V$	205
Appendice 5.A. : l'ensemble des structures hermitiennes associées à un espace euclidien de dimension $2n$	209
Appendice 5.B. : formes quadratiques sur un espace vectoriel complexe	210
Exercices	217
<b>6. Etude des groupes symplectiques</b>	225
6.1. Introduction	225
6.2. Etude du groupe $Sp(n, \mathbb{R})$	225
6.3. L'ensemble $H$ des structures hermitiennes complexes (cf. 5.7.) une autre approche	229
6.4. Etude de $L_F$	230
6.5. Etude de $Sp(n, \mathbb{C})$	232
6.6. L'espace des lagrangiens d'un espace symplectique complexe de dimension $2n$	234
6.7. Les groupes de petite dimension	235
6.8. Centralisateurs et connexité	243
Appendice 6.A. : espaces symétriques	246
Exercices	271
<b>7. Intégration sur les variétés. Polynômes harmoniques</b>	277
7.1. Introduction	277
7.2. Orientations et intégrations sur un espace vectoriel $V$ de dimension finie	277
7.3. Variétés orientables : définitions et exemples	281
7.4. Formule de changement de variables : commentaires et applications	291
7.5. Intégration sur les variétés riemanniennes	295
7.6. Variétés à bord. Formule de Stokes	304
7.7. L'espace $L^2(S^{n-1})$ et les polynômes harmoniques	311
Exercices	320
<b>Problèmes</b>	325
Index terminologique	335
Index des notations	338
Bibliographie	340
Table des matières	343
	345