

Quaderni dell'Unione Matematica Italiana
34

F. Borceux*

Fasce, logica e topoi

*Francis Borceux
Université Catholique de Louvain
Louvain-la-Neuve, Belgique

Pitagora Editrice • Bologna 1989

SOMMARIO

<u>1 - Fasci</u>	1
1 - 1 : Locale; algebra di Heyting	1
1 - 2 : Il pseudo-complemento	4
1 - 3 : Punti d'un locale	9
1 - 4 : Fasci su un locale	12
1 - 5 : Fasci costanti	18
1 - 6 : Fasci su un sito	20
 <u>2 - Topos</u>	 34
2 - 1 : Topos	34
2 - 2 : Prefasci su una categoria piccola	27
2 - 3 : G-insiemi	29
2 - 4 : Fasci su un locale	32
2 - 5 : Fasci su un sito	34
 <u>3 - Proprietà d'esattezza d'un topos</u>	 35
3 - 1 : Monomorfismi	35
3 - 2 : Qualche nozione insiemistica in un topos	36
3 - 3 : Morfismi parziali	41
3 - 4 : Oggetti iniettivi	49
3 - 5 : Colimiti finiti	51
3 - 6 : I topoi sopra un oggetto	56
3 - 7 : Proprietà dei colimiti	63
3 - 8 : Unione di sottooggetti	74
 <u>4 - Logica interna d'un topos</u>	 80
4 - 1 : La struttura d'algebra di Heyting di Ω	81
4 - 2 : I quantificatori	92
4 - 3 : Il linguaggio interno d'un topos	95
4 - 4 : La semantica di Kripke-Joyal	106
4 - 5 : La semantica dei prefasci	120
4 - 6 : La semantica dei fasci su un locale	123
4 - 7 : Qualche formula valida	127
4 - 8 : Qualche regola di deduzione	134
4 - 9 : Il principio di localizzazione	141

4-10 : La struttura d'un topos nel linguaggio interno	145
4-11 : Esistenza ed unicità	152
4-12 : La struttura di locale di Ω^X	156
<u>5 - Il terzo escluso</u>	161
5-1 : Altre proprietà di Ω	161
5-2 : I topoi booleani	166
5-3 : La legge di De Morgan	168
5-4 : Oggetti decidibili	172
5-5 : L'assioma della scelta	175
<u>6 - L'assioma dell'infinito</u>	181
6-1 : L'oggetto dei numeri naturali	181
6-2 : Aritmetica in un topos	187
6-3 : La tricotomia	193
6-4 : I cardinali finiti	199
6-5 : La Kuratowski-finitezza	202
<u>7 - Fasci in un topos</u>	207
7-1 : Topologia sull'oggetto Ω	207
7-2 : Operazione di chiusura	209
7-3 : Fasci per una topologia	213
7-4 : L'esistenza del fascio associato	216
7-5 : L'esattezza del funtore fascio associato	222
7-6 : Fasci per la doppia negazione	227
<u>8 - Morfismi di topos</u>	229
8-1 : Morfismi logici	229
8-2 : Morfismi geometrici	231
8-3 : Punti d'un topos	234
<u>9 - Il topos classificante</u>	238
9-1 : Epimorfismi forti	238
9-2 : Generatori forti	242
9-3 : Oggetti di presentazione finita	245
9-4 : Funtori esatti	248

9 - 5 : Le categorie di presentazione finita	252
9 - 6 : Il topos classificante d'una teoria a limiti finiti	259
9 - 7 : La topologia generata da una famiglia di crivelli	267
9 - 8 : Il topos classificante d'una teoria geometrica	272
9 - 9 : Il topos classificante d'una teoria coerente	280
 Indice delle definizioni	 289
Indice delle notazioni	294
Bibliografia	298