

Paul Malliavin

Professeur à l'Université Paris VI

Géométrie différentielle intrinsèque



Hermann

293, rue Lecourbe, 75015 Paris

Table

AVANT-PROPOS	15
1. VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES	
1. <i>Variétés topologiques</i>	17
1.1 Atlas sur un ensemble abstrait	17
1.2 Topologie associée à un atlas C^0	18
1.3 Équivalence des topologies, Dimension	19
1.4 Les variétés topologiques du point de vue de la topologie générale ..	20
1.5 Les variétés topologiques du point de vue des atlas	22
2. <i>Rappels de résultats de calcul différentiel</i>	26
2.1 Application dérivée	26
2.2 Les classes C^k	27
2.3 Difféomorphismes	28
3. <i>Variétés différentiables</i>	29
3.1 Atlas C^k -équivalents	29
3.2 Définition d'une structure de variété de classe C^k . Exemples	30
3.3 Applications de classe C^k . Exemples	32
3.4 L'anneau des fonctions de classe C^k	34
3.5 Image directe, Image réciproque	36
4. <i>Espace tangent</i>	37
4.1 Construction de l'espace tangent. Conséquences	37
4.2 Application dérivée	39
4.3 Principe de localisation	41
4.4 Notations et calculs pratiques	43
5. <i>Équivalence locale d'applications. Théorème du rang constant</i>	46
5.1 Problème de l'équivalence	46
5.2 Rang d'une application	47

5.3 Applications localement équivalentes à une application linéaire ...	49
5.4 Immersions, plongements	52
6. <i>Sous-variétés</i>	53
6.1 Définition	53
6.2 Sous-variétés et plongements	55
6.3 Théorème du rang constant et sous-variétés	58
6.4 Sous-variétés de $\mathbf{R}^n$	60
6.5 Application. Théorie des fonctions indépendantes	62
7. <i>Fibré tangent</i>	63
7.1 Le fibré tangent du point de vue algébrique	63
7.2 Structure de variété sur le fibré tangent	66
7.3 Dérivées d'ordre supérieur	68
7.4 Champs de vecteurs de classe C^k	69
7.5 Champs de tenseurs covariants. Formes différentielles	71
7.6 Image réciproque d'un champ covariant	73

II. CALCUL DIFFÉRENTIEL SUR LES VARIÉTÉS

1. <i>Différentielles</i>	89
1.1 Variété parallélisée	89
1.2 Différentielle d'une application; Image réciproque	90
1.3 Différentielle d'une fonction à valeurs vectorielles	91
1.4 Calculs pratiques sur les formes différentielles	92
2. <i>Champs de vecteurs et groupes à un paramètre</i>	95
2.1 Problème de l'équivalence pour les champs de vecteurs	95
2.2 Lignes de courant d'un champ de vecteurs	96
2.3 Ligne de courant maximale	97
2.4 Pseudo-groupe de transformation associé à un champ de vecteurs ..	99
3. <i>Dérivées de Lie</i>	102
3.1 Définition et existence	102
3.2 Propriétés de la dérivée de Lie	104
3.3 Crochet de dérivations et crochets de champs de vecteurs	106
3.4 Calculs pratiques dans une carte numérique	110
3.5 Invariance par un groupe à un paramètre	111
4. <i>Cobord des formes différentielles</i>	112
4.1 Position du problème	112
4.2 Le critère d' $\mathcal{L}$ (V)-linéarité	113

4.3	Cobord de formes différentielles de degré I	115
4.4	Définition générale du cobord	117
4.5	Expression du cobord dans une carte numérique	118
4.6	Propriétés du cobord	119
5.	<i>Le théorème de Frobenius</i>	122
5.1	Notion de p -champ	122
5.2	p -Champ complément intégral. Le théorème de réduction	124
5.3	Variété intégrale	129
5.4	Quelques énoncés équivalents de la condition de Frobenius	130
5.5	Détermination pratique des variétés intégrales d'un p -champ	134
III. THÉORIE LOCALE DES GROUPES DE LIE. APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES		
1.	<i>Parallélisme canonique sur un groupe de Lie</i>	156
1.1	Notion de groupe de Lie	156
1.2	Translation à gauche	156
1.3	Parallélisme canonique sur un groupe de Lie	157
1.4	Formes invariantes à gauche	157
1.5	Champ de vecteurs invariants à gauche	159
2.	<i>Algèbre de Lie et équation de structure de Maurer-Cartan</i>	161
2.1	Algèbre de Lie abstraite	161
2.2	Algèbre de Lie d'un groupe de Lie	162
2.3	Forme canonique à valeurs dans l'algèbre de Lie	163
2.4	Équation de structure de Maurer-Cartan	164
2.5	Expression dans une base des équations de structure	165
3.	<i>Théorie de l'équivalence de Darboux</i>	165
3.1	Définition de l'équivalence	165
3.2	Différentielle de Darboux	166
3.3	Équation de structure des différentielles de Darboux	166
3.4	Théorème d'existence fondamental. Construction d'une application ayant une différentielle de Darboux donnée	167
3.5	Détermination d'une application par son graphe	168
3.6	Traduction géométrique et démonstration du théorème fonda- mental	169
3.7	Résolution du problème de l'équivalence	171
4.	<i>Homomorphisme de groupes de Lie</i>	172
4.1	Définition	172
4.2	Différentielle de Darboux d'un homomorphisme	173

4.3 Homomorphismes d'algèbres de Lie et différentielles de Darboux ...	174
4.4 Homomorphisme de groupes et homomorphismes d'algèbres	176
5. <i>Sous-groupes et sous-algèbres</i>	177
5.1 Définition	177
5.2 Sous-algèbre de Lie associée à un sous-groupe de Lie	178
5.3 Problème de Frobenius attaché à une sous-algèbre de Lie	178
5.4 Correspondance entre sous-groupes et sous-algèbres	179
6. <i>Application exponentielle</i>	181
6.1 Groupe de transformations attaché à un champ invariant à gauche ..	181
6.2 Application exponentielle	182
6.3 Homomorphisme de $\mathbf{R}$ dans un groupe de Lie G	183
7. <i>Groupes de transformation de la géométrie élémentaire</i>	184
7.1 Rappel des définitions élémentaires des groupes classiques	184
7.2 Groupe de Lie et groupes classiques	185
7.3 Algèbre de Lie du groupe linéaire	188
7.4 Produits semi-directs. Algèbre de Lie du groupe des déplacements ..	191
7.5 La méthode du repère mobile en géométrie euclidienne	194
8. <i>Géométrie riemannienne. Dérivation covariante. Plongements euclidiens</i>	201
8.1 Variété riemannienne	202
8.2 Champs de repères	204
8.3 Fondement intrinsèque de la géométrie euclidienne par sa structure riemannienne	208
8.4 Dérivation covariante	211
8.5 Courbure d'une variété riemannienne	215
8.6 Plongements riemanniens	218
8.7 Théorie des hypersurfaces	221

IV. CALCUL DES VARIATIONS

1. <i>Formulation du problème</i>	255
1.1 Métrique sur une variété différentiable	255
1.2 Relèvement sur le fibré tangent	257
1.3 Forme différentielle de Hilbert	258
1.4 Covecteurs basiques sur $T(V)$	259
1.5 Lemme fondamental	260

2. Une condition nécessaire d'extrémum régulier : l'équation d'Euler-Cartan	262
2.1 Courbes extrémales régulières	262
2.2 Théorème fondamental (Euler-Cartan)	262
2.3 Calcul de la variation de la longueur d'une courbe	263
2.4 Démonstration du théorème d'Euler-Cartan	264
2.5 Exemple : géodésiques d'une variété riemannienne	265
2.6 Exemple : les équations d'Euler-Lagrange	267
3. Champs géodésiques. Invariants intégraux	271
3.1 Descente de la forme de Hilbert	272
3.2 Champ géodésique	272
3.3 Invariants intégraux	273
4. Condition suffisante d'extrémum : méthode de Hilbert	274
4.1 Transversalité	275
4.2 Champs de normales	277
4.3 Condition suffisante de minimum de Hilbert	278
5. Théorie d'Hamilton-Jacobi	280
5.1 Application d'Hamilton	280
5.2 Théorème (Équation d'Hamilton-Jacobi)	281
5.3 Forme canonique sur $T(V^*)$	282
5.4 Forme canonique des équations d'Euler : Équations d'Hamilton ...	283

APPENDICE

Démonstration du théorème de réduction locale d'un champ de vecteurs ,	293
BIBLIOGRAPHIE	303
INDEX	305