

Laurent Schwartz

Analyse I

THÉORIE DES ENSEMBLES ET TOPOLOGIE

avec la collaboration de K. Zizi

HERMANN  ÉDITEURS DES SCIENCES ET DES ARTS

TABLE

CHAPITRE I. THÉORIE DES ENSEMBLES

§1. Quelques éléments de logique classique.

La négation	13
La disjonction	13
La conjonction	14
L'implication et l'équivalence matérielles	14
L'implication et l'équivalence formelle	15
Tautologie	16
Un exemple de démonstration formelle	17
Les quantificateurs	19

§2. Théorie des ensembles : Les cinq premiers axiomes.

L'axiome d'extensionnalité	24
L'axiome de sélection ou de compréhension	27
L'axiome de la paire	30
L'axiome de la réunion	30
L'axiome de l'ensemble des parties	34
Ensemble produit de deux ensembles	34
Les relations binaires	36
L'axiome de fondement	37

§3. Applications - Famille - Produit d'une famille d'ensembles -
L'axiome du Choix.

Applications	39
Lois de compositions internes	40
Applications injectives - surjectives - bijectives	41
Image directe et image réciproque	42
Ensemble d'applications	44
Composition des applications	44
Changements de variables et changement d'applications	47
Famille d'ensembles : Réunion, Intersection, produit	49
L'axiome du choix	49
Ensemble somme	50

§4. Les entiers naturels : L'axiome de l'infini.

L'axiome de l'infini et le théorème de récurrence	51
Relation d'ordre dans l'ensemble des entiers naturels	53
Les axiomes de Peano	56
Construction d'applications définies dans \mathbb{N} par récurrence	57
Définition des différentes opérations sur les entiers naturels	58
Ensembles finis	64

§5. Ensembles quotients.

Classes d'équivalence	69
Partitions	69
Ensemble quotient	71
Quotient d'un groupe par un sous-groupe	72
Le groupe symétrique d'un ensemble	73
Signature d'une permutation	73
Indice d'un sous-groupe, sous-groupe normal	75
Quotient d'un espace vectoriel par un sous-espace vectoriel	77
Décomposition canonique d'une application linéaire	79

§6. Ensembles ordonnés.

Ensembles ordonnés, exemples	81
Parties majorées, majorants, maximum, borne supérieure . . .	83
Fonctions croissantes	85
Intervalles, sections	86
Droite achevée $\bar{\mathbb{R}}$	87
Ensemble réticulé - Espace vectoriel ordonné	87
Élément maximal (resp. minimal)	91
Le lemme de Zorn	91
Le théorème de Hahn-Banach	93
Équivalence de l'axiome du choix et du lemme de Zorn	95

§7. Ensembles infinis - Opérations sur les ensembles infinis.

Ensemble plus puissant qu'un autre ensemble	99
Ensembles équipotents	99
Opérations sur les nombres cardinaux	102
Ensembles dénombrables	104
Puissance du continu	109

§8. Les nombres ordinaux et cardinaux.

Les ensembles bien ordonnés	113
Les nombres ordinaux	119
L'axiome de substitution	123
Les aleph et l'hypothèse du continu	126

CHAPITRE II. TOPOLOGIE

§1. Espaces métriques.

Espaces métriques - Exemples élémentaires	131
Sphères, boules	132
Espaces vectoriels normés	133

§2. *Espaces Topologiques.*

Parties ouvertes	137
Base d'une topologie - Système de générateurs	139
Topologies sur un ensemble ordonné	139
Topologie de la droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$	142
Parties fermées	143
Voisinages	145
Intérieur	147
Extérieur - Frontière	148
Adhérence	148
Support d'une application à valeurs dans un espace vectoriel . .	150
Sous-ensembles denses - Espaces séparables	151
Sous-espace topologique - Métrique induite	152
Métriques sur un produit d'un nombre fini d'espaces métriques	154
Topologie sur un produit quelconque d'espaces topologiques . .	156
Produit d'espaces vectoriels normés	158
Norme sur un espace vectoriel quotient	159

§3. *Fonctions continues et semi-continues - Homéomorphismes.*

Fonctions continues - Exemples - Critères de continuité	161
Comparaison de topologies	163
Fonctions continues à valeurs dans un espace produit	165
Continuité et continuité partielle d'une fonction de plusieurs variables	166
Groupes topologiques- espaces vectoriels topologiques	167
Fonctions semi-continues inférieurement	168
Oscillation d'une fonction - Fonction supérieure	171
Homéomorphismes	173

§4. *Espaces métriques et espaces topologiques.*

Métriques et normes équivalentes	175
Espaces métrisables	176
Espaces métrisables séparables	180

§5. *Espaces compacts- Propriétés élémentaires.*

Propriété de Heine - Borel - Lebesgue	183
Caractérisation d'un espace compact par rapport à un système générateur	188
Le théorème de Tychonoff	191
Équivalence des normes dans un espace vectoriel de dimension finie	192

§6. *Convergences - Limites - Suites et Filtres.*

Exemples divers de convergences et de limites	197
Filtre - Base de filtre - Ultrafiltre	198
Point limite d'un filtre - Limite d'une fonction suivant un filtre .	201
Limite et continuité dans les espaces métrisables	202
Point d'accumulation d'une suite - d'un filtre	204
Le théorème de Weierstrass-Bolzano	205
Suite et filtre convergent dans un produit	209
Limite supérieure et limite inférieure d'une suite réelle	210

§7. *Propriétés des fonctions continues sur un espace compact.*

Image d'un compact par une application continue	211
Distance d'un point à un fermé (resp. entre deux fermés) . . .	214
Le théorème de D'Alembert	215
Développement d'un nombre réel $\in [0, 1]$ en base b	217
L'ensemble triadique de Cantor	222
Continuité uniforme - Condition de Hölder, de Lipschitz . . .	225

§8. *Espaces localement compacts.*

Système fondamental de voisinage d'un point (resp. compact)	231
Le théorème d'Urysohn	233
Partition de l'unité	235
Le compactifié d'Alexandroff	245
Application continue propre	249
Un théorème de densité	251

§9. *Espaces connexes - Espaces connexes par arcs - Espaces localement connexes.*

Espaces connexes	253
Espaces connexes par arcs	255
Composantes connexes	258
Espaces localement connexes	259
Critères de non homéomorphisme	262
Existence et continuité de la fonction réciproque d'une fonction strictement monotone continue	262
Métriques définissant la topologie de $\overline{\mathbb{R}}$	263

§10. *Espaces métriques complets.*

Suites de Cauchy et espace métrique	265
Parties fermées et parties complètes	267
Espaces précompacts	268
Produit d'espaces métriques complets	270
Espaces polonais	271
Le théorème de Baire	272
Prolongement des applications uniformément continues	273
Le théorème du point fixe	274
Espaces vectoriels topologiques de dimension finie	277

§11. *Théorie élémentaire des espaces vectoriels normés et des espaces de Banach.*

Norme d'une application linéaire continue	279
Noyau et Image d'une application linéaire continue	281
Espaces de Banach et algèbres de Banach	285
Le théorème de Banach -Steinhaus	287
Applications bilinéaires continues d'un produit d'espaces vectoriels normés dans un espace vectoriel normé	289
Applications multilinéaires continues	294

§12. *Séries dans les espaces vectoriels normés.*

Série convergente - Série normalement convergente	297
Quotient d'un espace vectoriel normé complet	299
Changement d'ordre des termes d'une série	301
Sommation par paquets d'une série commutativement convergente	305
Effet, sur une série, d'une application linéaire continue	308
Produit de deux séries numériques. Effet d'une application bilinéaire continue sur deux séries	309
Application linéaire inversible d'un espace de Banach dans un autre	311
Critère de semi-convergence	314

§13. *Espaces fonctionnels ; Convergence simple et uniforme.*

Distance de la convergence uniforme	319
Convergence simple et uniforme	322
Le théorème de Dini	325
Autres emplois de l'expression : convergence uniforme	327
Espaces faisant intervenir à la fois la structure de E et la structure de F	329
Continuité de la limite uniforme locale d'une suite de fonctions continues	330

Applications : quelques contre-exemples	332
Le chemin de Peano	333
Interversion des passages à la limite	335
Séries de fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé	336
Le théorème de Stone - Weierstrass	340
Ensemble équicontinu - le théorème d'Ascoli	346
Topologie \ast -faible d'un espace vectoriel normé	350
Les parties compactes de $C_c(E)$, E localement compact	351
Espaces fonctionnels métrisables séparables	353

§14. *Théorie spectrale élémentaire.*

Espaces hilbertiens	355
Le théorème de projection	360
Le théorème de Riesz	364
Adjoint d'un opérateur	365
Spectre (resp. Résolvante) d'un élément d'une algèbre - Rayon spectral	367
Caractères d'une algèbre	371
Algèbre de Banach involutive	373
Le théorème de Gelfand-Naimark	376
Le théorème de Bochner-Raïkov	380

§15. *Produit infini de nombres ou de fonctions réels ou complexes.*

Produit infini convergent et critère de Cauchy	383
Produit infini et séries de logarithmes	385
Produit infini de fonctions réelles ou complexes	388
Applications à la fonction ζ de Riemann	390