

Laurent Schwartz

Analyse II

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

avec la collaboration de K. Zizi

HERMANN  ÉDITEURS DES SCIENCES ET DES ARTS

TABLE

CHAPITRE III. CALCUL DIFFÉRENTIEL

§1. *Espaces affines.*

Définition d'un espace affine	11
Sous-espaces affines	14
Applications affines	15
Espaces affines normés	16
Ensembles convexes dans les espaces affines	20
Espaces vectoriels et affines euclidiens	23
Espaces vectoriels et affines hermitiens	24
Isomorphismes (ou semi-isomorphismes) d'un espace euclidien (ou hermitien) de dimension finie et de son dual	26
Bases orthonormales	27
Orthonormalisation de Schmidt	29
Espaces euclidiens ou hermitiens généralisés	29
Loi d'inertie	31

§2. *Fonctions d'une variable réelle.*

Définition d'une fonction continue à droite (resp. à gauche)	35
Discontinuité de première espèce. Fonctions réglées	35
Fonctions en escalier	38
Dérivée d'une fonction réelle de variable réelle	41
Fonctions de classe C^m - Formule de Taylor	42
Fonctions monotones	45
La fonction singulière de Lebesgue	48
Les fonctions dérivées et le théorème des valeurs intermédiaires	51
Fonctions convexes	52
Fonctions à variation bornée	54

Fonctions absolument continues	63
Longueur d'un chemin dans un espace métrique	65
§3. Dérivée d'une application d'un espace affine dans un autre	
Vecteur dérivé d'une fonction d'une variable scalaire	71
Dérivée partielle suivant un vecteur	72
Matrice dérivée, déterminant Jacobien	73
Insuffisance de la dérivée suivant un vecteur	74
Dérivée totale ou dérivée au sens de Fréchet	76
Notation différentielle	79
Interprétation géométrique de l'application dérivée :	
variété différentiable et sous-espace affine tangent	79
Gradient d'une fonction réelle sur un espace euclidien	82
Cas où l'espace des valeurs $\mathcal{F}$ est un produit d'espaces affines	83
Cas où l'espace de définition $\mathcal{E}$ est un produit d'espaces affines	84
Dérivée d'une application bilinéaire continue	86
Espaces de fonctions continûment dérivables	87
Champ de vecteurs - Dérivation suivant un champ de vecteurs	89
Divergence d'un champ de vecteurs	92
§4. Dérivation des fonctions composées, applications au changement de variables.	
Le théorème de dérivation des applications composées	93
Exemples de calcul de quelques dérivées usuelles	98
Application à la technique du changement de variables	101
Equation des cordes vibrantes	101
Dérivées partielles en polaires (resp. sphériques) à partir des dérivées en cartésiennes	104
Dérivées partielles en cartésiennes à partir de dérivées en polaires (resp. sphériques)	106
Laplacien en coordonnées polaires planes et sphériques	109
Calcul du Laplacien d'une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ et ne dépendant que de la distance à l'origine	110

§5. Formules des accroissements finis - applications.

Le théorème des accroissements finis	113
Dérivabilité totale et dérivabilité partielle	118
Dérivabilité d'une limite de fonctions et d'une série	121
Dérivabilité d'un produit infini	129

§6. Dérivées d'ordre supérieur.

Dérivée seconde	135
Dérivées successives	138
Espaces produits : dérivabilité totale et dérivabilité partielle . .	142
Espace de fonctions m fois dérivables	143
Dérivée d'un produit - Formule de Leibniz	144
La formule de Leibniz-Hörmander	146
Dérivation - Crochet de Lie de deux champs de vecteurs . . .	150

§7. Formule de Taylor - Maxima et minima.

Formule de Taylor	155
Applications de la formule de Taylor au calcul des dérivées de fonctions	158
Formule de Taylor par rapport à un système de coordonnées . .	161
Application à l'étude des maxima et des minima	167
Condition nécessaire pour un extremum	167
Recherche de conditions nécessaires et suffisantes pour un extremum	168
Cas particulier d'une fonction de deux variables réelles x et y .	171
Application de la formule de Taylor à l'étude de la position d'une hypersurface par rapport à son plan tangent	173
Fonctions de classe C^m dans une partie fermée	173

§8. Fonctions implicites - Difféomorphisme.

Position du problème de la fonction implicite	175
Existence de la fonction implicite	176
Dérivabilité de la fonction implicite	179
Dérivabilité de la fonction $u \mapsto u^{-1}$	181
Le théorème des fonctions implicites	185
Etude autour d'un point régulier (resp. singulier)	187
Cas où $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, sont de dimension finie	189
Application ouverte - Difféomorphisme	190
C^m -Difféomorphisme	195
Rang d'une application dérivable - Théorème du rang constant	196
Calcul des dérivées d'ordre supérieur	201
Technique du changement de variables	203
Coordonnées curvilignes	205
Image d'un champ de vecteurs par un difféomorphisme	207
Groupe à un paramètre de difféomorphismes	208

§9. Variétés différentiables.

Définition d'une sous-variété par expression de certaines coordonnées comme fonctions des autres	211
Définition d'une sous-variété par une représentation paramétrique vraie	212
Définition d'une sous-variété par des équations implicites	218
Variétés abstraites	220
Morphismes de variété	223
Exemples de variétés	226
Partition de l'unité	240
Espace vectoriel tangent en un point d'une variété d'un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension N	244
Espace vectoriel tangent en un point d'une variété abstraite	248
Application linéaire tangente	256

Immersion - Plongement - Sous-variétés	259
Fonctions dépendantes et fonctions indépendantes	266
Variétés singulières paramétriques	268
Théorème du plongement de Whitney	269
Fibré tangent - Fibré tautologique	275
Champ de vecteurs sur une variété	279

§10. *Maxima et minima liés.*

Multiplicateurs de Lagrange	285
Manière pratique de procéder pour trouver un maximum ou un minimum relatif lié	287
Applications de la théorie des maxima liés, inégalités de Hölder et de Minkowski	290

§11. *Calcul des variations*

Position du problème	303
Dérivabilité de J	305
Une condition nécessaire d'extremum - Equation d'Euler	310
Cas simples d'intégrabilité élémentaire des équations d'Euler . .	314
Equation des géodésiques sur une surface	320
Problèmes d'extrema liés	323
Application aux géodésiques	326
Extrémités variables. Conditions de transversalité	330
Equations canoniques de Hamilton	336
Applications à la Mécanique	338
Calcul de variations relatif à des intégrales multiples	340

CHAPITRE IV. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

§1 *Théorème d'existence et unicité d'une solution : cas particulier.*

Position du problème	347
Méthode des approximations successives	350
Continuité de la solution par rapport à un paramètre	353
Extension de la méthode à certaines équations intégrales	355

§2 Théorème d'existence et unicité d'une solution : Cas général.

Existence et unicité d'une solution locale	357
Solution maximale	362
Majoration a priori des solutions	366
Une condition d'existence de solutions globales	370
Application à la mécanique	373
Continuité de la solution en fonction d'un paramètre	373
Dérivée d'ordre supérieur de la solution	377
Intégrales premières	378
Equation différentielle associée à un champ de vecteurs	380

§3. Équations différentielles linéaires.

Espace vectoriel des solutions	387
Résolvante d'une équation différentielle linéaire	391
Equations linéaires avec second membre	395
Cas d'une équation différentielle scalaire d'ordre p avec second membre	398
Dérivabilité par rapport à un paramètre de la solution	401
Flot d'un champ de vecteurs	404

§4. Équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Exponentielle d'un opérateur	411
Cas particulier où F est de dimension finie : construction de l'exponentielle d'un opérateur	413
Cas d'une équation différentielle scalaire à coefficients constants	418
Equation différentielle scalaire d'ordre p à coefficients constants avec second membre	423
Solutions bornées des équations différentielles linéaires à coefficients constants	428