

Laurent Schwartz

Analyse III

CALCUL INTÉGRAL

avec la collaboration de K. Zizi

HERMANN  ÉDITEURS DES SCIENCES ET DES ARTS

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE V. THÉORIES DE LA MESURE

§1. *Intégrale de Riemann sur la droite réelle.*

Introduction	9
Intégrale des fonctions en escalier	10
Intégrale supérieure de Riemann d'une fonction positive, bornée, à support compact	12
Fonctions intégrables-Riemann	15
Intégrale d'une fonction intégrable-Riemann	18
Exemples de fonctions intégrables-Riemann	25
Calcul de l'intégrale de Riemann par la méthode des sommes de Cauchy-Riemann	27
Valeur moyenne d'une fonction dans un intervalle	30

§2. *Espaces mesurables - Espaces Mesurés - Mesure extérieure.*

Tribus - Tribu borélienne	33
Clan - Classe monotone	38
Image réciproque d'une tribu	42
Espaces mesurables - Fonctions mesurables	43
Propriétés particulières aux fonctions numériques mesurables	46
Mesures - Espaces mesurés	51
Mesure extérieure	56
Mesure définie par une mesure extérieure (Carathéodory)	58
Mesure extérieure de Hausdorff	60
Dimension au sens de Hausdorff	64
Propriétés vérifiées presque partout	66

§3. *Intégrale supérieure associée à une mesure abstraite positive.*

Fonction \mathcal{A} -étagée - Intégrale d'une fonction \mathcal{A} -étagée élémentaire	69
Espace $\text{Sup}\mathcal{H}^+$ - Espace $\text{Sup}^+(\Omega, \mathcal{A})$	74
Intégrale supérieure d'une fonction positive	79
Le théorème de Beppo Levi et le lemme de Fatou	80
Mesure extérieure associée	83
Caractérisation des ensembles mesurables	88
Mesure complète - Complétée d'une mesure	93
Cas où le clan \mathcal{A} est une tribu	95
Mesure de Lebesgue-Stieltjes sur \mathbb{R}	101
Existence d'un ensemble non mesurable	113

§4. *Mesures de Radon sur un espace localement compact.*

Mesure de Radon sur un espace compact	115
Mesures de Radon sur un espace localement compact	122
Mesure de Radon vectorielle	129
Support d'une mesure de Radon	131
Prolongement d'une mesure de Radon à des fonctions continues de support non compact	139
Recollement des morceaux de mesures de Radon	140
Mesure de Radon complexe conjuguée	141
Mesure de Radon réelle - positive	143

§5. *Intégrale supérieure associée à une mesure de Radon positive.*

Intégrale supérieure d'une fonction s.c.i positive, mesure extérieure d'un ouvert	153
Intégrale supérieure d'une fonction positive, mesure extérieure d'un ensemble	162
Le théorème de Beppo Levi et le lemme de Fatou	166
Régularité des mesures de Radon	168
Mesure intérieure	176
Les 2 intégrations σ -finies abstraite et Radon	180
Mesures sur les espaces topologiques	183

§6. *Fonctions mesurables - Convergence en mesure.*

Limite de suites de fonctions mesurables	189
Suites de fonctions boréliennes	197
Convergence en mesure d'une suite de fonctions mesurables	199
Théorème d'Egoroff	202
Mesurabilité au sens de Lusin	205

§7. *Fonctions à valeurs vectorielles intégrables.*

Intégrale d'une fonction continue à support compact décomposable	211
Fonction Lebesgue-intégrable - L'espace $\mathcal{L}^1(\Omega, \mu; F)$	214
Propriétés des fonctions intégrables	216
Caractérisation des fonctions intégrables	225
Intégrabilité et intégrales des fonctions définies presque partout	228
Théorèmes de convergence dominée de Lebesgue	228
Suites et séries de fonctions intégrables	234
Intégration sur un ensemble mesurable	238
Approximation par des fonctions continues à support compact	241
Les fonctions Riemann-intégrables	243

§8. *Espaces $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu; F)$.*

Inégalité de Hölder - Inégalité de Minkowski	251
Inégalité de convexité dénombrable généralisée	256
Les espaces $\mathcal{L}_p^p(\Omega, \mu)$	257
Relations entre les divers $\mathcal{L}_p^p(\Omega, \mu)$	267
Les espaces $L^p(\Omega, \mu, F)$: Le théorème de Fischer-Riesz	271
Les espaces $\mathcal{L}_p^0(\Omega, \mu)$ et $L_p^0(\Omega, \mu)$	274
Les espaces $\mathcal{L}_p^\infty(\Omega, \mu)$ et $L_p^\infty(\Omega, \mu)$	279
L'équiiintégrabilité d'ordre p	283
Encore un ensemble non mesurable	289

§9. Mesures abstraites à valeurs vectorielles.

Mesure abstraite à valeurs vectorielles	293
Mesure à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$	295
Variation positive, négative, totale d'une mesure à valeurs $\bar{\mathbb{R}}$	299
Borne supérieure d'une famille de mesures abstraites	303
Décomposition de Hahn	305
Variation totale d'une mesure à valeurs vectorielles	308

§10. Les théorèmes de Lebesgue-Radon-Nikodym - Application à la dualité et au prolongement borélien.

Mesure induite	317
Mesure de base μ	322
Mesure dominée - Mesure singulière - Mesures étrangères	328
Théorèmes de Radon-Nikodym	332
Décomposition de Lebesgue d'une mesure	341
Application à la dualité	346
Application au prolongement d'une mesure non positive	351
Application à l'intégrabilité d'une fonction par rapport à plusieurs mesures	361

§11. Image d'une mesure par une application.

Image d'une mesure abstraite σ -finie positive	365
La catastrophe de la mesure image	368
Image d'une mesure de Radon sur un espace topologique	369
Image d'une mesure de Radon sur un espace localement compact	372
Cas où H est un homéomorphisme de X sur Y	375
Extension lorsque μ est une mesure de Radon vectorielle de base positive	376
Exemples divers d'images directes de mesures	377

§12. *Produit d'espaces mesurés - Théorèmes de Fubini.*

Produit d'espaces mesurables	379
Existence et unicité de la mesure produit de 2 mesures abstraites	382
Existence et unicité de la mesure produit de 2 mesures de Radon	385
Théorèmes de Fubini	389
L'isométrie de $L^p(\Omega_1 \times \Omega_2, \mu_1 \otimes \mu_2; F)$ sur $L^p(\Omega_1, \mu_1 \otimes \mu_2; L^p(\Omega_2, \mu_2; F))$	402
Extension aux intégrales multiples	403
Invariance de la mesure de Lebesgue par les translations et les isométries	405
Le théorème de densité de Lebesgue	407

§13. *Convergence vague d'une suite de mesures.*

Convergence en norme, convergence locale en norme	415
Convergence vague	416
Convergence vague et convergence uniforme	422
Convergence vague d'une suite de mesures vers une mesure de Dirac	423
Convergence étroite d'une suite de mesures de normes finies	426
Convergence vague et convergence étroite	428
Convergence étroite d'une suite de mesures vers une mesure de Dirac	429
Convergence vague de produits tensoriels	439
Ensemble vaguement compact de mesures positives	440