

Aleksej G. Svešnikov Andrej N. Tichonov

# Teoria delle funzioni di una variabile complessa

Editori Riuniti Edizioni Mir

8	<i>Dai redattori della collana</i>
9	<i>Prefazione</i>
10	<i>Introduzione</i>
11	<b>I. Variabili complesse e funzioni di una variabile complessa</b>
	§ 1. Numeri complessi e operazioni con i numeri complessi (11)
	1. Nozione di un numero complesso (11). 2. Operazioni con i numeri complessi (11). 3. Rappresentazione geometrica dei numeri complessi (12). 4. Radici $n$ -esime dei numeri complessi (14).
	§ 2. Limite di una successione di numeri complessi (16)
	1. Definizione di successione convergente (16). 2. Criterio di Cauchy (18). 3. Il punto all'infinito (19).
	§ 3. Nozione di funzione di una variabile complessa. Continuità
	1. Definizioni fondamentali (20). 2. Continuità (22). 3. Esempi (24).
	§ 4. Derivazione di una funzione di una variabile complessa (29)
	1. Definizione. Condizioni di Cauchy-Riemann (29). 2. Proprietà delle funzioni analitiche (32). 3. Significato geometrico della derivata di una funzione di variabile complessa (33). 4. Esempi (34).
	§ 5. Integrale rispetto ad una variabile complessa (36)
	1. Proprietà fondamentali (36). 2. Teorema di Cauchy (40). 3. Integrale indefinito (42).
	§ 6. Integrale di Cauchy (45)
	1. Deduzione della formula di Cauchy (45). 2. Conseguenze della formula di Cauchy (47). 3. Principio del massimo modulo di una funzione analitica (48).
	§ 7. Integrali dipendenti da un parametro (50).
	1. Dipendenza analitica da un parametro (50). 2. Derivata di ordine qualsiasi di una funzione analitica (52).
55	<b>II. Serie di funzioni analitiche</b>
	§ 1. Serie uniformemente convergenti di funzioni di una variabile complessa (55)
	1. Serie numeriche (55). 2. Serie di funzioni. Convergenza uniforme (56). 3. Proprietà delle serie uniformemente convergenti. Teoremi di Weierstrass (58). 4. Integrali impropri dipendenti da un parametro (62).
	§ 2. Serie di potenze. Serie di Taylor (63)
	1. Teorema di Abel (63). 2. Serie di Taylor (68).
	§ 3. Unicità della definizione di una funzione analitica (72)
	1. Zeri di una funzione analitica (72). 2. Teorema di unicità (72).

### III. Prolungamento analitico. Funzioni elementari di una variabile complessa

§ 1. Funzioni elementari di una variabile complessa. Prolungamento dall'asse reale (76)

1. Prolungamento dall'asse reale (76). 2. Prolungamento di relazioni (79). 3. Proprietà delle funzioni elementari (83). 4. Applicazioni prodotte dalle funzioni elementari (86).

§ 2. Prolungamento analitico. Definizione di superficie di Riemann

1. Principi fondamentali. Nozione di superficie di Riemann (90).

2. Prolungamento analitico lungo una frontiera (92). 3. Esempi di costruzione del prolungamento analitico. Prolungamento lungo una frontiera (94). 4. Esempi di costruzione di prolungamenti analitici. Prolungamento mediante serie di potenze (98). 5. Punti regolari e singolari di una funzione analitica (101). 6. Nozione di funzione analitica intera (104).

### IV. Serie di Laurent e punti singolari isolati

§ 1. Serie di Laurent (106)

1. Dominio di convergenza della serie di Laurent (106). 2. Sviluppo di una funzione analitica in serie di Laurent (108)

§ 2. Classificazione dei punti singolari isolati di una funzione analitica univoca (110).

### V. Teoria dei residui e loro applicazioni

§ 1. Residuo di una funzione analitica in un punto singolare isolato

1. Definizione e formule per calcolare i residui (118). 2. Teorema fondamentale della teoria dei residui (120).

§ 2. Calcolo degli integrali definiti mediante i residui (123)

1. Integrali della forma  $\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$  (123). 2. Integrali della

forma  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  (124). 3. Integrali della forma  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} f(x) dx$ .

Lemma di Jordan (127). 4. Caso delle funzioni multivoche (133).

§ 3. Residuo logaritmico (139)

1. Nozione di residuo logaritmico (139). 2. Calcolo del numero degli zeri di una funzione analitica (140).

### VI. Trasformazioni conformi

§ 1. Proprietà generali (145)

1. Definizione di applicazione conforme (145). 2. Alcuni semplici esempi (149). 3. Principi fondamentali (152). 4. Teorema di Riemann (157).

§ 2. Funzione razionale lineare (160)

§ 3. Funzione di Žukovskij (169)

§ 4. Integrale di Schwarz-Cristoffel. Applicazioni conformi di poligoni (171)

### VII. Applicazione delle funzioni analitiche alla risoluzione di problemi al contorno

§ 1. Generalità (180)

1. Relazione fra funzioni analitiche ed armoniche (180). 2. Invarianza dell'operatore di Laplace per applicazioni conformi (181). 3. Problema

di Dirichlet (183). 4. Costruzione di una funzione di sorgente (186).  
 § 2. Applicazioni ai problemi di meccanica e di fisica (187)  
 1. Moto di un fluido piano e stazionario (187). 2. Campo elettrostatico piano (199).

## 208 VIII. Nozioni fondamentali di calcolo operatoriale

§ 1. Proprietà fondamentali della trasformazione di Laplace (208)  
 1. Definizione della trasformazione di Laplace (208). 2. Trasformata delle funzioni elementari (212). 3. Proprietà della trasformata (214). 4. Tabella della proprietà della trasformata (222). Tabella delle trasformate (222)

§ 2. Definizione dell'originale rispetto alla trasformata (224)

1. Formula di Mellin (224). 2. Condizioni di esistenza dell'originale (227). 3. Calcolo dell'integrale di Mellin (230). 4. Caso di una funzione regolare all'infinito (234).

§ 3. Risoluzione di problemi per equazioni differenziali lineari mediante il metodo operatoriale (237)

1. Equazioni differenziali ordinarie (237). 2. Equazioni del calore (241). 3. Problema al contorno per un'equazione alle derivate parziali (243).

## 246 Supplemento 1. Metodo del valico

1. Osservazioni introduttive (246). 2. Metodo di Laplace (249). 3. Metodo del valico (256).

## 264 Supplemento 2. Metodo di Wiener-Hopf

1. Osservazioni introduttive (264). 2. Proprietà analitiche della trasformata di Fourier (268). 3. Equazioni integrali con nucleo dipendente dalla differenza degli argomenti (270). 4. Schema generale del metodo di Wiener-Hopf (275). 5. Problemi che portano ad equazioni integrali con nucleo dipendente dalla differenza degli argomenti (280). 5.1. Deduzione dell'equazione di Milne (280). 5.2. Studio della risoluzione dell'equazione di Milne (283). 5.3. Diffrazione su uno schermo piano (287). 6. Risoluzione dei problemi al contorno per le equazioni alle derivate parziali mediante il metodo di Wiener-Hopf (289).

## 293 Supplemento 3. Funzioni di più variabili complesse

1. Definizioni principali (293). 2. Nozione di funzione analitica di più variabili complesse (294). 3. Formula di Cauchy (295). 4. Serie di potenze (296). 5. Serie di Taylor (298). 6. Prolungamento analitico (299).

## 302 Supplemento 4. Metodo di Watson

## 310 Supplemento 5. Approssimazione di una funzione analitica con l'aiuto di un polinomio d'interpolazione

318 *Bibliografia*

319 *Indice analitico*