

Jean-Pierre Serre

REPRÉSENTATIONS
LINÉAIRES
DES GROUPES FINIS

COLLECTION  MÉTHODES

HERMANN, ÉDITEURS DES SCIENCES ET DES ARTS

Table

<i>Introduction</i>	11
I. REPRÉSENTATIONS ET CARACTÈRES	
§ 1. <i>Généralités sur les représentations linéaires</i>	15
1.1. Définitions	15
1.2. Premiers exemples	16
1.3. Sous-représentations	17
1.4. Représentations irréductibles	19
1.5. Produit tensoriel de deux représentations	20
§ 2. <i>Théorie des caractères</i>	23
2.1. Le caractère d'une représentation	23
2.2. Le lemme de Schur; premières applications	25
2.3. Les relations d'orthogonalité des caractères	27
2.4. Décomposition de la représentation régulière	30
2.5. Nombre des représentations irréductibles	31
2.6. La décomposition canonique d'une représentation	33
2.7. Décomposition explicite d'une représentation	35
§ 3. <i>Sous-groupes, produits, représentations induites</i>	39
3.1. Sous-groupes commutatifs	39
3.2. Produit de deux groupes	40
3.3. Représentations induites	42
§ 4. <i>Extension aux groupes compacts</i>	47
4.1. Groupes compacts	47
4.2. Mesure invariante sur un groupe compact	47
4.3. Représentations linéaires des groupes compacts	48
§ 5. <i>Exemples</i>	51
5.1. Le groupe cyclique C_n	51
5.2. Le groupe C_∞	51

5.3. Le groupe diédral D_n	52
5.4. Le groupe D_{nh}	54
5.5. Le groupe D_∞	55
5.6. Le groupe D_{nh}	56
5.7. Le groupe alterné \mathfrak{A}_4	57
5.8. Le groupe symétrique \mathfrak{S}_4	58
5.9. Le groupe du cube	59
<i>Bibliographie</i> (Partie I)	60
II. REPRÉSENTATIONS EN CARACTÉRISTIQUE ZÉRO	
§ 6. <i>L'algèbre du groupe</i>	63
6.1. Représentations et modules	63
6.2. Décomposition de $\mathbf{C}[G]$	64
6.3. Le centre de $\mathbf{C}[G]$	65
6.4. Rappels sur les entiers	66
6.5. Propriétés d'intégralité des caractères. Applications	67
§ 7. <i>Représentations induites; critère de Mackey</i>	71
7.1. Rappels	71
7.2. Caractère d'une représentation induite; formule de réciprocity	72
7.3. Restriction aux sous-groupes	74
7.4. Critère d'irréductibilité de Mackey	75
§ 8. <i>Exemples de représentations induites</i>	77
8.1. Sous-groupes distingués; applications aux degrés des représentations irréductibles	77
8.2. Produits semi-directs par un groupe commutatif	78
8.3. Rappels sur certaines classes de groupes finis	79
8.4. Théorème de Sylow	81
8.5. Représentations linéaires des groupes hyper-résolubles	82
§ 9. <i>Théorème d'Artin</i>	85
9.1. L'anneau $R(G)$	85
9.2. Énoncé du théorème d'Artin	86
9.3. Première démonstration	87
9.4. Deuxième démonstration de i) \Rightarrow ii)	88
§ 10. <i>Théorème de Brauer</i>	91
10.1. Éléments p -réguliers; sous-groupes p -élémentaires	91
10.2. Caractères induits provenant des sous-groupes p -élémentaires	92
10.3. Construction de caractères	93

10.4. Démonstration des théorèmes 18 et 18'	94
10.5. Théorème de Brauer	95
§ 11. Applications du théorème de Brauer	97
11.1. Caractérisations des caractères	97
11.2. Un théorème de Frobenius	99
11.3. Réciproque du théorème de Brauer	101
11.4. Spectre de $A \otimes R(G)$	102
§ 12. Questions de rationalité	105
12.1. Les anneaux $R_K(G)$ et $\bar{R}_K(G)$	105
12.2. Indices de Schur	107
12.3. Réalisabilité sur les corps cyclotomiques	109
12.4. Rang du groupe $R_K(G)$	109
12.5. Généralisation du théorème d'Artin	111
12.6. Généralisation du théorème de Brauer	112
12.7. Démonstration du théorème 28	113
§ 13. Questions de rationalité: exemples	117
13.1. Le cas du corps des nombres rationnels	117
13.2. Le cas du corps des nombres réels	121
Bibliographie (Partie II)	125

III. INTRODUCTION A LA THÉORIE DE BRAUER

§ 14. Les groupes $R_K(G)$, $R_A(G)$ et $P_K(G)$	129
14.1. Les anneaux $R_K(G)$ et $R_A(G)$	129
14.2. Les groupes $P_K(G)$ et $P_A(G)$	130
14.3. Structure de $P_K(G)$	130
14.4. Structure de $P_A(G)$	132
14.5. Dualités	134
14.6. Extension des scalaires	135
§ 15. Le triangle cde	137
15.1. Définition de $c: P_A(G) \rightarrow R_K(G)$	137
15.2. Définition de $d: R_K(G) \rightarrow R_A(G)$	137
15.3. Définition de $e: P_A(G) \rightarrow R_K(G)$	139
15.4. Premières propriétés du triangle cde	140
15.5. Exemple: le cas des p' -groupes	140
15.6. Exemple: le cas des p -groupes	141
15.7. Exemple: produits de p' -groupes et de p -groupes	142
§ 16. Théorèmes	143
16.1. Propriétés du triangle cde	143
16.2. Caractérisation de l'image de e	145

16.3. Caractérisation des $A[G]$ -modules projectifs par leur caractère	145
16.4. Exemples de $A[G]$ -modules projectifs : représentations irréductibles de défaut nul	147
§ 17. <i>Démonstrations</i>	149
17.1. Changement de groupe	149
17.2. Le théorème de Brauer dans le cas modulaire	150
17.3. Démonstration du théorème 33	151
17.4. Démonstration du théorème 35	152
17.5. Démonstration du théorème 37	153
17.6. Démonstration du théorème 38	155
§ 18. <i>Caractères modulaires</i>	159
18.1. Le caractère modulaire d'une représentation	159
18.2. Indépendance des caractères modulaires	161
18.3. Traductions	163
18.4. Une section de d	164
18.5. Exemple : caractères modulaires du groupe symétrique \mathfrak{S}_4	165
18.6. Exemple : caractères modulaires du groupe alterné \mathfrak{A}_5	167
§ 19. <i>Application aux représentations d'Artin</i>	171
19.1. Représentations d'Artin et de Swan	171
19.2. Rationalité des représentations d'Artin et de Swan	172
19.3. Un invariant	173
<i>Annexe</i>	175
<i>Bibliographie (Partie III)</i>	177
<i>Index des notations</i>	179
<i>Index terminologique</i>	181