

Claude Tisseron

NOTIONS DE TOPOLOGIE

INTRODUCTION AUX
ESPACES FONCTIONNELS

*Hermann
Paris*



*Collection
Méthodes*

Table

INTRODUCTION

Chapitre I NOTIONS DE TOPOLOGIE

1 - <u>Généralités sur les espaces métriques</u>	3
1.1 Distance euclidienne sur le plan	3
1.2 Autres exemples de distances	6
1.3 Espaces métriques	10
1.4 Propriétés particulières à la droite réelle	17
1.5 Exercices	22
2 - <u>Espaces topologiques, notions usuelles</u>	25
2.1 Ouverts, fermés	25
2.2 Bases, espaces séparables	30
2.3 Applications continues	34
2.4 Sous-espaces	38
2.5 Espaces produits	40
2.6 Critère de séparation, applications	46
3 - <u>Limites</u>	48
3.1 La notion de limite	48
3.2 Conditions d'existence pour les espaces métriques	51
3.3 Propriétés des limites	52
3.4 Applications aux espaces normés	56
3.5 Prolongement d'une application par continuité	58
4 - <u>Exercices et problèmes sur le chapitre I</u>	62

Chapitre II ESPACES PARTICULIERS

1 - <u>Espaces connexes</u>	73
1.1 Définitions et propriétés immédiates	73
1.2 Exemples	76

1.3	Connexité par arcs	78
1.4	Espaces localement connexes	80
1.5	Exercices	81
2 -	<u>Espaces compacts</u>	83
2.1	Définitions et exemples	83
2.2	Propriétés des compacts	85
2.3	Fonctions continues sur un compact	88
2.4	Produit d'espaces compacts	90
2.5	Espaces localement compacts	93
2.6	Exercices	96
3 -	<u>Espaces métriques complets</u>	99
3.1	Généralités	99
3.2	Propriétés usuelles	102
3.3	Rapport entre espaces métriques complets et espaces métriques compacts	104
3.4	Complétion d'un espace métrique	109
3.5	Théorème du point fixe	111
3.6	Théorème de Baire	113
4 -	<u>Le théorème de prolongement de Tietze-Urysohn</u>	117
4.1	Le théorème de Tietze-Urysohn	117
4.2	Séparation des fermés par des fonctions continues	118
4.3	Diverses notions de séparation	119
5 -	<u>Exercices et problèmes sur le chapitre II</u>	121
 Chapitre III ESPACES NORMES		
<u>Introduction</u>		126
1 -	<u>Généralités</u>	128
1.1	Définitions et propriétés élémentaires	128
1.2	Sous-espaces, espaces produits	131
1.3	Séries	133
1.4	Familles totales, bases topologiques	137
1.5	Applications linéaires et multilinéaires continues	139
1.6	Exercices	145
2 -	<u>Exemples</u>	150
2.1	Espaces normés de dimension finie	150
2.2	Espaces préhilbertiens	152
2.3	Espaces de fonctions bornées	153
2.4	Les normes $\ \cdot\ _a$ sur $C([a,b],K)$ pour $a \geq 1$	157
2.5	Les espaces $\ell^a(K)$ pour $a \geq 1$	159
2.6	Espaces d'applications linéaires continues	161
2.7	Espaces quotients	166

2.8	Problèmes	168
3	<u>Familles sommables</u>	180
3.1	Définitions, exemples	181
3.2	La condition de Cauchy	186
3.3	Familles absolument sommables dans un Banach	190
3.4	Cas des espaces de dimension finie	193
3.5	Exercices	194
4	<u>Espaces de Hilbert</u>	196
4.1	Généralités, rappels d'algèbre	197
4.2	Exemples	203
4.3	Théorèmes de projection	208
4.4	Applications	
	- densité d'un sous-espace	213
	- existence des bases hilbertiennes	214
	- dual topologique d'un espace hilbertien	214
	- adjoint d'un opérateur	215
4.5	Familles orthonormales	217
4.6	Le théorème spectral pour les opérateurs hermitiens compacts	224
4.7	Exercices	231
5	<u>Espaces de fonctions continues</u>	239
5.1	Espaces de fonctions continues bornées	240
5.2	Le théorème d'approximation de Stone-Weierstrass	243
5.3	Applications	
	- approximation des fonctions périodiques	249
	- une base hilbertienne de $C(\mathbb{T}, \mathbb{C})_2$	251
5.4	Ensemble équi-continus, théorème d'Ascoli	254
5.5	Exercices et problèmes	259
6	<u>Quelques grands classiques</u>	267
6.1	Le théorème de Hahn-Banach	267
6.2	Applications	
	- séparation des points par des formes linéaires continues	271
	- l'isométrie de E dans son bidual	271
	- caractérisation de l'adhérence d'un sous-espace	272
	- le théorème de Gelfand-Mazur	273
6.3	Le théorème de Banach-Schauder	276
	Applications :	
	- existence de fonctions continues dont la série de Fourier diverge	278
6.4	Le théorème de l'application ouverte	284
	Applications :	
	- théorème du graphe fermé	287
	- continuité d'une application linéaire	288
6.5	Exercices	290

APPENDICE : Compléments de théorie des ensembles	297
BIBLIOGRAPHIE	307
INDEX DES NOTATIONS	309
INDEX TERMINOLOGIQUE	311
INDEX DES AUTEURS CITES	317

