

Claude Tisseron

Géométries affine,
projective
et euclidienne

HERMANN

Table

<u>NOYAU 1</u>	<u>ESPACES AFFINES</u>	
1	NOTION D'ESPACE AFFINE.	3
	1. Définition - 2. Notation - 3. Règles de calcul - 4. Translations 5. Exemples - 6. Exercices - 7. Choix d'une origine, vectorialisé - 8. Exemple et remarque.	
2	BARYCENTRES, COORDONNÉES.	9
	1. Définitions - 2. Remarques - 3. Remarque pratique pour la détermination des barycentres - 4. Coordonnées, repères - 5. Famille affinement libre - 6. Exemples, droite affine, plan affine - 7. Segments, convexes - 8. Exercices.	
3	APPLICATIONS AFFINES.	15
	1. Définitions - 2. Exemples - 3. Caractérisations des applications affines - 4. Commentaires - 5. Points fixes - 6. Existence de points fixes - 7. Exemples, homothéties - 8. Notation matricielle - 9. Exercices.	
4	ISOMORPHISMES, EXEMPLES	24
	1. Proposition - 2. Isomorphismes - 3. Exemples - 4. Le groupe affine - 5. Le groupe affine comme produit semi-direct - 6. Exercices - 7. Notion invariante par isomorphisme.	
5	SOUS-ESPACES AFFINES	39
	1. Définition - 2. Caractérisations des sous-espaces affines - 3. Remarque - 4. Sous-espace affine engendré par une partie - 5. Parallélisme - 6. Propriétés d'intersections - 7. Sous-espaces et applications affines - 8. Exercices.	

6 PROJECTIONS, SYMETRIES, APPLICATIONS.	54
1. Projecteurs linéaires - 2. Projecteurs affines - 3. Symétries -	
4. Le théorème de Thalès - 5. Le groupe des homothéties-translations	
- 6. Les théorèmes de Ménélaüs et Ceva - 7. Le théorème de Desargues	
- 8. Le théorème de Pappus - 9. Remarques.	
7 DILATATIONS, TRANSECTIONS.	71
1. Dilatations et translations vectorielles - 2. Rapport avec les	
matrices - 3. Générateurs de $SL(E)$ et $GL(E)$ - 4. Dilatations et trans-	
sections affines - 5. Générateurs de $SA(X)$ et $GA(X)$ - 6. Exercices.	

THEME 1 CALCUL BARYCENTRIQUE - INTRODUCTION AU PLAN PROJECTIF

1 DROITES EN COORDONNEES BARYCENTRIQUES	82
1. Retour sur les coordonnées barycentriques - 2. Equation d'une	
droite - 3. Intersection de droites.	
2 APPLICATIONS.	86
1. Les théorèmes de Ménélaüs et Ceva - 2. Un lemme - 3. Le théorème	
de Desargues - 4. Le théorème de Pappus - 5. Le théorème de Pascal.	
3 POINTS A L'INFINI, PLAN PROJECTIF	94
1. Points à l'infini - 2. Le plan $\hat{X}$ comme quotient de K^3_0 .	

THEME 2 ESPACE AFFINE X COMME HYPERPLAN AFFINE D'UN ESPACE VECTORIEL $\hat{X}$. APPLICATIONS, QUADRIQUES AFFINES ET PROJECTIVES.

1 CONSTRUCTION DE $\hat{X}$	98
1. Présentation du problème - 2. Construction de $\hat{E}$ - 3. L'espace vec-	
toriel $\hat{X}$.	
2 RAPPORTS ENTRE X ET $\hat{X}$	101
1. Repères de X et bases de $\hat{X}$ - 2. Applications affines sur X et li-	
néaires sur $\hat{X}$ - 3. Formes 2-affines sur X et formes quadratiques sur $\hat{X}$.	
3 APPLICATION : QUADRIQUES AFFINES SUR X	106
1. Généralités, exemples - 2. Simplification de l'équation - 3. For-	
mes équivalentes ($K=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) - 4. Exemples, $n=2$ ou 3 , ($K=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) -	
5. Complément. Propriétés affines des coniques (étude élémentaire) -	
6. Equations donnant la même image.	
4 APPLICATION : QUADRIQUES PROJECTIVES.	128
1. Définitions - 2. Quadriques projectives et quadriques affines -	

3. Polaires, hyperplan tangent - 4. Classification pour $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ -
 5. Exemples pour $\dim X = 2$ - 6. Exemples pour $\dim X = 3$ et $K = \mathbb{R}$ - 7.
 Quadriques projectives ayant la même image - 8. Exercices.

NOUVEAU 2 LE LANGAGE PROJECTIF.

1 LA DROITE PROJECTIVE.	142
1. Homographies - 2. Le groupe projectif - 3. Droite projective complétée d'une droite affine.	
2 BIRAPPORT ET HOMOGRAPHIES	144
1. Birapport de quatre points d'une droite projective - 2. Paramétrage d'une droite projective - 3. Action du groupe projectif sur les points - 4. Envoi d'un point à l'infini - 5. Interprétation vectorielle - 6. Interprétation géométrique - 7. Exercices.	
3 ESPACES PROJECTIFS.	152
1. Le dictionnaire vectoriel projectif - 2. Commentaires - 3. Repère projectif - 4. Notation et exemple - 5. Homographies - 6. Le groupe projectif de $P(E)$ - 7. Action des homographies sur les repères projectifs - 8. Envoi de points à l'infini.	
4 EXEMPLES, APPLICATIONS.	159
1. Le théorème de Pappus pour le plan projectif - 2. Perspectives d'un plan projectif - 3. Birapport de quatre droites d'un plan projectif - 4. Homologies d'un plan projectif et théorème de Desargues - 5. Homologies pour $\dim P(E) \geq 2$ - 6. Homologies d'une droite projective - 7. Courbes algébriques planes.	
5 DUALITE	166
1. Dualité dans le plan projectif - 2. Preuve du principe de dualité - 3. Remarque : birapport de quatre hyperplans d'un faisceau - 4. Interprétation avec E^* - 5. Exercices.	
6 RETOUR SUR LA NOTION D'INVARIANT.	171
1. Invariant affine - 2. Invariant unimodulaire - 3. Invariant projectif - 4. L'idée de Klein - 5. Action de groupe.	

THEME 3 LE THEOREME FONDAMENTAL DE LA GEOMETRIE AFFINE : BIJECTIONS TRANSFORMANT TROIS POINTS ALIGNES EN TROIS POINTS ALIGNES. APPLICATIONS, EXEMPLES.

1 AUTOMORPHISMES DE CORPS ET APPLICATIONS SEMI-AFFINES.	178
---	-----

1. Application σ -linéaire - 2. Propriétés immédiates - 3. Applications σ -affines - 4. Propriétés.	
2 CONSTRUCTIONS GEOMETRIQUES DES OPERATIONS DE K .	180
3 LE THEOREME FONDAMENTAL (cas affine).	181
1. Le théorème - 2. Remarque.	
4 LE THEOREME FONDAMENTAL (cas projectif)	185
1. σ -homographie - 2. Le théorème.	
5 APPLICATION A LA DUALITE.	187
1. Notations - 2. Dualité et homographie - 3. Dualité et formes sesquilinéaires - 4. Théorème - 5. Théorème : polarités et formes sesquilineaires - 6. Problèmes.	
6 INTERMEDE CONIQUE : EXEMPLE DE POLARITE	194
1. Définition d'un ovale $\bar{C}$ - 2. Intersection de $\bar{C}$ avec une droite - 3. Ecritures avec des coordonnées homogènes - 4. Construction des polaires par rapport à $\bar{C}$ - 5. Homographies sur $\bar{C}$ et théorème de Pascal et de Brianchon.	

THEME 4 TOPOLOGIE

1 ESPACES NORMES SUR $\mathbb{R}$ ET $\mathbb{C}$	204
1. Topologie sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ - 2. Normes - 3. Espaces normés de dimension finie - 4. Normes sur $\mathcal{L}(E, F)$ et $M_{m,n}(K)$.	
2 TOPOLOGIE SUR UN ESPACE AFFINE X .	212
1. Distance sur X - 2. Cas où $K = \mathbb{R}$, demi-espaces.	
3 TOPOLOGIE SUR LE GROUPE AFFINE.	214
1. Topologie sur $\text{AFF}(X, X')$ - 2. Utilisation de coordonnées - 3. Le groupe affine.	
4 TOPOLOGIE DES ESPACES PROJECTIFS.	219
1. Topologie quotient - 2. Exemple 1: $\mathbb{R}/a\mathbb{Z}$ et S_1 - 3. Les distances intrinsèques de S_1 et S_2 - 4. Exemple 2 : Espaces projectifs.	
5 COMPLEMENTS SUR LA TOPOLOGIE DE $P_1(\mathbb{R})$ ET $P_1(\mathbb{C})$.	228
1. La droite projective $P_1(\mathbb{R})$ - 2. Topologie de $P_1(\mathbb{C})$ - 3. Exercices.	

NOUVEAU 3 ESPACES EUCLIDIENS

1 ESPACES EUCLIDIENS ET HERMITIENS.	240
-------------------------------------	-----

1. Produit scalaire - 2. Orthogonalité - 3. La bijection $E \rightarrow E^*$ -	
4. Endomorphismes orthogonaux et unitaires - 5. Diagonalisation de certains endomorphismes - 6. Angles non orientés - 7. Exercices.	
2 ESPACES EUCLIDIENS ET AFFINES EUCLIDIENS.	266
1. Compléments - 2. Espaces affines euclidiens - 3. Projections et symétries orthogonales affines - 4. Isométries affines - 5. Similitudes linéaires et affines - 6. Exercices.	
3 LE GROUPE ORTHOGONAL DU PLAN, ANGLES ORIENTÉS	301
1. Le groupe $O(2)$ - 2. Angles orientés de vecteurs - 3. Mesure des angles orientés - 4. Angles orientés de droites - 5. Arcs capables, comparaison des différentes notions d'angles - 6. Exercices.	
THEME 5 LE GROUPE ORTHOGONAL	
1 GENERATEURS DES GROUPE $O(E)$ ET $O^+(E)$	330
1. Premiers résultats - 2. Décomposition en produit de symétries dans $O(E)$ - 3. Décomposition en produit de retournements dans $O^+(E)$.	
2 APPLICATIONS AUX ISOMETRIES AFFINES	337
1. Décomposition canonique des isométries - 2. Générateurs de $Is(X)$ et $Is^+(X)$ - 3. Exemples, exercices.	
3 TOPOLOGIE DU GROUPE ORTHOGONAL	345
1. Topologie sur $\mathcal{M}(E)$ - 2. Topologie des groupes $O(E)$ et $O^+(E)$. - 3. Composantes connexes de $O(E)$ - 4. Exercices.	
4 SIMPLICITE DU GROUPE ORTHOGONAL.	351
1. Notion de groupe simple - 2. Simplicité de $O^+(E)$ pour $\dim E \neq 4$.	
5 QUATERNIONS, APPLICATIONS A $O^+(3)$ ET $O^+(4)$	354
1. Le corps des quaternions $\mathbb{H}$ - 2. Automorphismes de $\mathbb{H}$ et $O^+(3)$ -	
3. Utilisation de $\mathbb{H}$ pour l'étude de $O^+(4)$ - 4. Exercices.	
6 COMPLEMENTS	367
1. Complexification, applications - 2. Le paradoxe de Hausdorff-Banach-Tarski - 3. Sous-groupe fini de $O(2)$ et $O(3)$.	
BIBLIOGRAPHIE.	379
INDEX DES NOTATIONS.	380
INDEX TERMINOLOGIQUE	382