

Boris M. Budak Sergej V. Fomin

# **Integrali multipli e serie**

Edizioni Mir

## 14 Dai redattori

## 15 Prefazione

## 16 1. Integrali doppi

### § 1. Alcune nozioni ausiliarie. Area di una figura piana

1. Punti di frontiera e punti interni. Dominio (17) — 2. Distanza tra due insiemi (18) — 3. Area di una figura piana (19) — 4. Proprietà principali di un'area (23) — 5. Nozione di misura di un insieme (24).

### § 2. Definizione e proprietà principali dell'integrale doppio

1. Definizione di integrale doppio (25) — 2. Condizioni di esistenza dell'integrale doppio. Somme superiori ed inferiori (26) — 3. Alcune importanti classi di funzioni integrabili (31) — 4. Proprietà dell'integrale doppio (33).

### § 3. Funzioni additive di insieme. Derivata rispetto a un'area

1. Funzioni di un punto e di insieme (34) — 2. Integrale doppio come funzione additiva di un dominio (35) — 3. Derivata di una funzione di insieme rispetto all'area (36) — 4. Derivata di un integrale doppio rispetto all'area (37) — 5. Ricostruzione di una funzione additiva di insieme della sua derivata (37) — 6. Integrale definito come funzione di insieme (39) — 7. Estensione delle funzioni di insieme rispetto alla loro additività (40).

### § 4. Alcune applicazioni fisiche e geometriche degli integrali doppi

1. Calcolo di un volume (40) — 2. Calcolo di aree (41) — 3. Massa di una lastra (41) — 4. Coordinate del centro di massa di una lastra (42) — 5. Momenti d'inerzia di una lastra (43) — 6. Fascio di luce incidente su una lastra (43) — 7. Flusso di un fluido attraverso la sezione trasversale di un canale (44).

### § 5. Riduzione dell'integrale doppio ad un integrale iterato

1. Considerazioni euristiche (45) — 2. Caso di un dominio di integrazione rettangolare (46) — 3. Caso di un dominio curvilineo (49).

### § 6. Cambiamento di variabili nell'integrale doppio

1. Applicazione tra domini (53) — 2. Coordinate curvilinee (54) — 3. Coordinate polari (55) — 4. Impostazione del problema del cam-

biamiento di variabili nell'integrale doppio (56) — 5. Area in coordinate curvilinee (57) — 6. Cambiamento di variabili nell'integrale doppio (63) — 7. Confronto con un caso unidimensionale. Integrale su un dominio orientato (66).

## 68 II. Integrali tripli e multipli

### § 1. Definizione e proprietà principali dell'integrale triplo

1. Osservazioni preliminari. Volume di una figura spaziale (68) — 2. Definizione di integrale triplo (70) — 3. Condizioni di esistenza dell'integrale triplo. Integrabilità delle funzioni continue (71) — 4. Proprietà degli integrali tripli (71) — 5. Integrale triplo come funzione additiva di insieme (72).

### § 2. Alcune applicazioni degli integrali tripli in fisica e geometria

1. Calcolo dei volumi (74) — 2. Metodo per trovare la massa di un solido per mezzo della densità (74) — 3. Momento d'inerzia (74) — 4. Calcolo delle coordinate del centro di massa (74) — 5. Attrazione gravitazionale di un solido su un punto materiale (75).

### § 3. Calcolo dell'integrale triplo

1. Riduzione dell'integrale triplo su un parallelepipedo a quello iterato (76) — 2. Riduzione dell'integrale triplo a quello iterato su un dominio curvilineo (78).

### § 4. Cambiamento di variabili nell'integrale triplo

1. Applicazione di figure spaziali (81) — 2. Coordinate curvilinee nello spazio (82) — 3. Coordinate cilindriche e sferiche (82) — 4. Elemento di volume in coordinate curvilinee (84) — 5. Cambiamento di variabili nell'integrale triplo. Significato geometrico dello jacobiano (85).

### § 5. Nozione di integrale multiplo di ordine qualsiasi

1. Generalità (89) — 2. Esempi (90).

## 92 III. Elementi di geometria differenziale

### § 1. Vettore funzione di un argomento scalare

1. Definizione di vettore funzione. Limite. Continuità (92) — 2. Derivazione di un vettore funzione (93) — 3. Odografo. Punti singolari (95) — 4. Formula di Taylor (96) — 5. Integrale di un vettore funzione rispetto ad un argomento scalare (96) — 6. Funzioni vettoriali di più argomenti scalari (97).

### § 2. Curve nello spazio

1. Equazione vettoriale di una curva (97) — 2. Triangolo principale (99) — 3. Formule di Frenet (100) — 4. Valutazione della curvatura e della torsione (101) — 5. Sistema di coordinate legato al triangolo principale (103) — 6. Forma di una curva nell'intorno di un suo punto arbitrario (104) — 7. Curvatura orientata di una curva piana (106) — 8. Equazioni intrinseche di una curva (107) — 9. Alcune applicazioni alla meccanica (108).

### § 3. Equazione parametrica di una superficie

1. Concetto di superficie (110) — 2. Parametrizzazione di una superficie (112) — 3. Equazioni parametriche di una superficie (113) —

4. Curve su una superficie (114) — 5. Piano tangente (115) — 6. Normale ad una superficie (116) — 7. Sistema di coordinate nei piani tangenti (117).

§ 4. Determinazione delle lunghezze, degli angoli e delle aree su una superficie curvilinea. La prima forma quadratica fondamentale di una superficie

1. Sistema di coordinate affini nel piano (119) — 2. Lunghezza dell'arco di una curva su una superficie. Prima forma quadratica fondamentale (120) — 3. Angolo fra due curve (122) — 4. Definizione di area di una superficie. Esempio di Schwarz (122) — 5. Calcolo dell'area di una superficie regolare (125).

§ 5. Curvatura di curve su una superficie. Seconda forma quadratica fondamentale di una superficie

1. Sezioni normali di una superficie e loro curvatura (129) — 2. Seconda forma quadratica fondamentale di una superficie (131) — 3. Indicatrice di Dupin (133) — 4. Direzioni principali e curvature principali di una superficie. Formula di Eulero (134) — 5. Calcolo delle curvature principali (135) — 6. Curvatura totale e curvatura media (136) — 7. Classificazione di punti su una superficie (136) — 8. Prima e seconda forma quadratica fondamentale come sistema completo di invarianti di una superficie (138).

§ 6. Proprietà intrinseche di una superficie

1. Superfici applicabili. Condizione necessaria e sufficiente di applicabilità (139) — 2. Proprietà intrinseche di una superficie (140) — 3. Superfici di curvatura costante (141).

## 463 IV. Integrali curvilinei

§ 1. Integrali curvilinei di prima specie

1. Definizione di un integrale curvilineo di prima specie (143) — 2. Proprietà di integrali curvilinei (145) — 3. Alcune applicazioni degli integrali curvilinei di prima specie (148) — 4. Integrali curvilinei di prima specie nello spazio (150).

§ 2. Integrali curvilinei di seconda specie

1. Impostazione del problema. Lavoro di un campo di forze (150) — 2. Definizione di integrale curvilineo di seconda specie (152) — 3. Legami fra gli integrali curvilinei di prima e di seconda specie (152) — 4. Calcolo dell'integrale curvilineo di seconda specie (154) — 5. Dipendenza dell'integrale curvilineo di seconda specie dall'orientamento del cammino d'integrazione (157) — 6. Integrali curvilinei lungo cammini che si autointersecano e cammini chiusi (157) — 7. Integrali curvilinei di seconda specie lungo una curva nello spazio (159).

§ 3. Formula di Green

1. Derivazione della formula di Green (161) — 2. Calcolo di un'area per mezzo della formula di Green (165).

§ 4. Condizioni d'indipendenza di un integrale curvilineo del secondo tipo dal cammino. Integrazione di differenziali totali

1. Impostazione del problema (166) — 2. Caso di un dominio semplicemente connesso (166) — 3. Ricostruzione di una funzione dal suo differenziale totale (170) — 4. Integrali curvilinei in un dominio a connessione multipla (171).

## 175 V. Integrali di superficie

### § 1. Integrali di superficie di prima specie

1. Definizione di integrale di superficie di una funzione scalare (175) — 2. Riduzione di un integrale di superficie a quello doppio (176) — 3. Alcune applicazioni di integrali di superficie alla meccanica (180) — 4. Integrale di superficie di una funzione vettoriale. Concetto generale di integrale di superficie di prima specie (181).

### § 2. Integrali di superficie di seconda specie

1. Superfici ad una e due facce (183) — 2. Definizione dell'integrale di superficie di seconda specie (186) — 3. Riduzione dell'integrale di superficie di seconda specie a un integrale doppio (190).

### § 3. Teorema di Ostrogradskij

1. Dimostrazione del teorema di Ostrogradskij (193) — 2. Applicazione della formula di Ostrogradskij al calcolo degli integrali di superficie. Rappresentazione del volume di una figura spaziale sotto forma di integrale di superficie (196).

### § 4. Teorema di Stokes

1. Dimostrazione della formula di Stokes (197) — 2. Applicazione della formula di Stokes allo studio degli integrali curvilinei nello spazio (200).

## 203 VI. Teoria dei campi

### § 1. Campi scalari

1. Definizione ed esempi di campi scalari (203) — 2. Superfici e curve di livello (204) — 3. Vari tipi di simmetria dei campi (205) — 4. Derivata direzionale (206) — 5. Gradiente di un campo scalare (207).

### § 2. Campi vettoriali

1. Definizione ed esempi di campi vettoriali (209) — 2. Curve e superfici vettoriali (209) — 3. Vari tipi di simmetria di un campo vettoriale (210) — 4. Campo di gradienti. Campo potenziale (210).

### § 3. Flusso di campo vettoriale. Divergenza

1. Flusso del campo vettoriale attraverso una superficie (212) — 2. Divergenza (213) — 3. Significato fisico della divergenza per vari tipi di campi. Esempi (216) — 4. Campo solenoidale (218) — 5. Equazione di continuità (219) — 6. Flusso piano di un fluido. Formula di Ostrogradskij per un campo piano (220).

### § 4. Circolazione e rotore

1. Circolazione di campo vettoriale (222) — 2. Rotore di campo vettoriale. Formula di Stokes in notazione vettoriale (222) — 3. Formula simbolica per il rotore (224) — 4. Significato fisico del rotore (224) — 5. Ancora sui campi potenziali e solenoidali (227).

### § 5. Operatore hamiltoniano

1. Vettore simbolico  $\nabla$  (228) — 2. Operazioni sul vettore  $\nabla$  (229).

### § 6. Operazioni ripetute con $\nabla$ . Operatore laplaciano

1. Operazioni di derivazione del secondo ordine (231) — 2. Equazione di conduttività termica (233) — 3. Distribuzione stazionaria di temperatura. Insiemi armonici (235).

§ 7. Operazioni fondamentali della teoria dei campi in coordinate curvilinee ortogonali

1. Impostazione del problema (236) — 2. Coordinate curvilinee ortogonali nello spazio (237) — 3. Coordinate cilindriche e sferiche (239) — 4. Gradiente (240) — 5. Divergenza (240) — 6. Rotore (241) — 7. Operatore laplaciano (243) — 8. Formule fondamentali in coordinate sferiche e cilindriche (243).

§ 8. Campi variabili in mezzi continui

1. Derivate parziali e totali rispetto al tempo (244) — 2. Equazione di Eulero (246) — 3. Derivata rispetto al tempo di un integrale su un volume fluido (248) — 4. Altra dimostrazione dell'equazione di continuità (250).

## 151 VII. Tensori

§ 1. Tensore ortogonale affine

1. Trasformazione di basi ortonormali (252) — 2. Definizione di tensore affine ortogonale (254).

§ 2. Connessione tra tensori di rango due ed operatori lineari

1. Operatore lineare come tensore di rango due (256) — 2. Tensore di rango due come operatore lineare (257).

§ 3. Connessione tra tensori e forme invarianti multilineari

1. Tensori di rango uno e forme invarianti lineari (259) — 2. Tensori di rango due e forme invarianti bilineari (259) — 3. Tensori di rango qualsiasi  $p$  e forme invarianti multilineari (262).

§ 4. Tensore di deformazione (262).

§ 5. Tensore degli sforzi

1. Definizione di tensore degli sforzi (263) — 2. Tensore degli sforzi come operatore lineare (265).

§ 6. Operazioni algebriche su tensori

1. Addizione, sottrazione e moltiplicazione di tensori (267) — 2. Moltiplicazione di un tensore per un vettore (267) — 3. Contrazione (268) — 4. Scambio di indici (268) — 5. Sviluppo di un tensore di rango due in parte simmetrica e antisimmetrica (269).

§ 7. Tensore di spostamenti relativi (270).

§ 8. Campo di un tensore

1. Campo di un tensore. Divergenza di un tensore (272) — 2. Formula di Ostrogradskij per il campo di un tensore (274) — 3. Equazioni di moto di un mezzo continuo (274).

§ 9. Assi principali di un tensore simmetrico di rango due (276).

§ 10. Definizione generale di tensore

1. Basi reciproche di vettori (277) — 2. Componenti covarianti e controvarianti di un vettore (278) — 3. Convenzione per la sommatoria (278) — 4. Trasformazione dei vettori base (279) — 5. Trasformazione delle componenti covarianti e controvarianti di un vettore (279) — 6. Definizione generale di tensore (280) — 7. Operazioni sui tensori (282) — 8. Generalizzazioni successive (282).

## § 1. Convergenza uniforme e relativi criteri

1. Convergenza e convergenza uniforme (285) — 2. Criteri per la convergenza uniforme (291).

## § 2. Proprietà delle successioni e serie di funzioni uniformemente convergenti

1. Continuità e convergenza uniforme (296) — 2. Passaggio al limite sotto il segno di integrale e integrazione di una serie termine a termine (298) — 3. Passaggio al limite sotto il segno di derivata e derivate di una serie termine a termine (302) — 4. Passaggio al limite termine per termine nelle successioni e serie di funzioni (304).

## § 3. Serie di potenze

1. Intervallo di convergenza di una serie di potenze. Raggio di convergenza (306) — 2. Convergenza uniforme di una serie di potenze e continuità della sua somma (311) — 3. Derivazione e integrazione delle serie di potenze (314) — 4. Operazioni aritmetiche sulle serie di potenze (316).

## § 4. Sviluppo delle funzioni in serie di potenze

1. Teoremi fondamentali sullo sviluppo delle funzioni in serie di potenze; sviluppo delle funzioni elementari (317) — 2. Alcune applicazioni delle serie di potenze (322).

## § 5. Serie di potenze in un dominio complesso (325).

## § 6. Convergenza in media

1. Scarto quadratico medio e convergenza in media (328) — 2. Disuguaglianza di Cauchy-Bunjakovskij (329) — 3. Integrazione di successioni e serie convergenti in media (331) — 4. Connessione tra la convergenza in media e la possibilità della derivazione termine a termine di successioni e serie (333) — 5. Connessione fra la convergenza in media e altri tipi di convergenza (334).

335 Appendice 1 al capitolo VIII. Criterio di compattezza di una famiglia di funzioni

338 Appendice 2 al capitolo VIII. Convergenza debole e funzione delta

## 342 IX. Integrali impropri

## § 1. Integrali con limiti d'integrazione infiniti

1. Definizioni; esempi (342) — 2. Riduzione dell'integrale improprio  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  a una successione numerica e serie numerica (345) — 3. Criterio di Cauchy per gli integrali impropri (348) — 4. Convergenza assoluta. Criteri di convergenza assoluta (349) — 5. Convergenza semplice (355) — 6. Estensione dei metodi di calcolo degli integrali al caso degli integrali impropri (357).

## § 2. Integrali di funzioni illimitate con limiti d'integrazione finiti e infiniti (358).

§ 3. Valore principale di un integrale improprio divergente (365).

§ 4. Integrali impropri multipli

1. Integrale di una funzione illimitata in un dominio limitato (368) — 2. Integrali di funzioni non negative (370) — 3. Convergenza assoluta (373) — 4. Criteri di convergenza assoluta (374) — 5. Equivalenza di convergenza e di convergenza assoluta (377) — 6. Gli integrali impropri con domini d'integrazione illimitati (379) — 7. Metodi di calcolo di integrali impropri multipli (380).

## 382 X. Integrali dipendenti da un parametro

§ 1. Integrali propri e integrali impropri semplici dipendenti da un parametro

1. Integrali propri dipendenti da un parametro (382) — 2. Integrali impropri semplici dipendenti da un parametro (387).

§ 2. Integrali impropri dipendenti da un parametro

1. Nozione di convergenza uniforme (390) — 2. La riduzione di un integrale improprio dipendente da un parametro ad una successione di funzioni (392) — 3. Proprietà di integrali convergenti uniformemente, dipendenti da un parametro (395) — 4. Criteri di convergenza uniforme per integrali impropri dipendenti da un parametro (402) — 5. Esempi di calcolo degli integrali impropri mediante derivazione e integrazione rispetto al parametro (406).

§ 3. Integrali di Eulero

1. Proprietà della funzione gamma (412) — 2. Proprietà della funzione beta (416).

§ 4. Integrali multipli propri e impropri dipendenti da parametri (419).

## 426 XI. Serie di Fourier e integrali di Fourier

§ 1. Nozioni preliminari sulle funzioni periodiche. Impostazione del problema principale

1. Periodi di una funzione periodica (426) — 2. Estensione periodica di una funzione non periodica (427) — 3. Integrale di una funzione periodica (428) — 4. Operazioni aritmetiche sulle funzioni periodiche (428) — 5. Sovrapposizione di armoniche con frequenze multiple (429) — 6. Impostazione del problema principale (430) — 7. Ortogonalità di un sistema trigonometrico; coefficienti di Fourier e serie di Fourier (430) — 8. Sviluppo in serie di Fourier di funzioni pari e dispari (433) — 9. Sviluppo di funzioni nell'intervallo  $[-\pi, \pi]$  (434).

§ 2. Teorema fondamentale sulla convergenza delle serie trigonometriche di Fourier

1. Classe di funzioni regolari a tratti (435) — 2. Formulazione del teorema fondamentale sulla convergenza di una serie trigonometrica di Fourier (437) — 3. Lemma fondamentale (437) — 4. Dimostrazione del teorema fondamentale sulla convergenza (438) — 5. Esempi (443) — 6. Serie di Fourier di seni e di coseni definite nell'intervallo  $[0, l]$  (446).



§ 3. Serie di Fourier rispetto a sistemi ortogonali. Disuguaglianza di Bessel

1. Sistemi ortogonali di funzioni (449) — 2. Coefficienti di Fourier e serie di Fourier di una funzione  $f(x)$  rispetto ad un sistema ortogonale (451) — 3. Problema di deviazione quadratica minima. Identità di Bessel. Disuguaglianza di Bessel (452).

§ 4. Legame tra il grado di regolarità di una funzione e la velocità di convergenza della sua serie trigonometrica di Fourier. Nozione di miglioramento della convergenza

1. Condizioni per la convergenza uniforme di una serie trigonometrica di Fourier (456) — 2. Legame tra l'ordine di regolarità di una funzione, e la velocità di convergenza della sua serie trigonometrica di Fourier (459) — 3. Accelerazione di convergenza di una serie trigonometrica di Fourier (463).

§ 5. Approssimazione uniforme di una funzione continua mediante polinomi trigonometrici e algebrici. Teoremi di Weierstrass (465).

§ 6. Sistemi ortogonali completi e chiusi

1. Nozione di completezza di un sistema ortogonale (470) — 2. Criterio di completezza — uguaglianza di Parseval (471) — 3. Proprietà dei sistemi completi (471) — 4. Completezza del sistema trigonometrico principale (473) — 5. La completezza di altri sistemi ortogonali classici (476).

§ 7. Serie di Fourier in sistemi ortogonali di funzioni complesse e scrittura complessa delle serie trigonometriche di Fourier (477).

§ 8. Serie trigonometriche di Fourier per funzioni di più variabili indipendenti (481)

§ 9. Integrale di Fourier

1. Estensione illimitata dell'intervallo di sviluppo di una funzione in serie di Fourier e formula integrale di Fourier (483) — 2. Dimostrazione della formula integrale di Fourier (485) — 3. Integrale di Fourier come sviluppo in una somma di armoniche (489) — 4. La forma complessa dell'integrabile di Fourier (490) — 5. Trasformata di Fourier (491) — 6. Integrale di Fourier per funzioni di più variabili indipendenti (494).

500 Appendice 1 al cap. XI. Polinomi di Legendre

502 Appendice 2 al cap. XI. Ortogonalità con funzione peso e processo di ortogonalizzazione

507 Appendice 3 al cap. XI. Spazi funzionali e analogie geometriche

509 Appendice 4 al cap. XI. Alcune applicazioni della trasformata di Fourier

514 Appendice 5 al cap. XI. Sviluppo della funzione delta in serie di Fourier e integrale di Fourier

516 Appendice 6 al cap. XI. Approssimazione uniforme di funzioni con polinomi

519 Appendice 7 al cap. XI. Sommatoria stabile delle serie di Fourier con coefficienti perturbati

524 Supplemento 1. Sviluppi asintotici

§ 1. Esempi di sviluppi asintotici

1. Sviluppi asintotici nell'intorno dello zero (524) — 2. Sviluppi asintotici nell'intorno del punto all'infinito (525).

§ 2. Alcune definizioni generali e teoremi

1. Ordine di un infinitesimo. Equivalenza asintotica (527) —  
2. Sviluppi asintotici delle funzioni (528).

§ 3. Metodo di Laplace per lo sviluppo asintotico di alcuni integrali (533).

547 Supplemento 2. Sui calcolatori digitali universali

§ 1. Generalità sulle macchine calcolatrici

1. Introduzione (537) — 2. Principali tipi di macchine calcolatrici (537) — 3. Principali componenti di un calcolatore digitale universale e loro funzione (538) — 4. Sistemi numerici usati in un calcolatore digitale universale (540) — 5. Rappresentazione di numeri nei calcolatori digitali (541).

§ 2. Operazioni base eseguite dai calcolatori digitali universali. Istruzioni

1. Tipi di operazioni (541) — 2. Principali operazioni aritmetiche (542) — 3. Operazioni di calcolo addizionali (543) — 4. Operazioni logiche (543) — 5. Operazioni relative ai dispositivi esterni (544) — 6. Operazioni di salto (544) — 7. Esecuzione delle operazioni in un calcolatore digitale (545).

§ 3. Elementi di programmazione

1. Nozioni generali (546) — 2. Programmazione secondo formule (547) — 3. Processi ciclici (548) — 4. Programmazione a schemi di blocco. Sottoprogrammi (550) — 5. Codici di istruzioni. Operazioni sulle istruzioni (552) — 6. Automatizzazione della programmazione (553).

§ 4. Organizzazione del lavoro con calcolatori digitali universali

1. Condizioni che definiscono l'efficienza di applicazione dei calcolatori digitali universali (554) — 2. Fasi principali della soluzione dei problemi utilizzando calcolatori digitali universali (554) — 3. Metodi di avviso e di rivelazione degli errori di calcolo (555).

556 Bibliografia

557 Indice analitico