

Vladimir Ivanovič Smirnov

Corso di matematica superiore

Volume secondo

Editori Riuniti

Indice

I. Equazioni differenziali ordinarie

- 11 § 1. *Equazioni del primo ordine*
1. Concetti generali, p. 11. — 2. Soluzione determinata a partire dalla condizione iniziale. Teorema di esistenza e di unicità, p. 13. — 3. Equazioni a variabili separabili, p. 16. — 4. Esempi, p. 17. — 5. Equazione omogenea, p. 21. — 6. Equazioni lineari ed equazioni di Bernoulli, p. 26. — 7. Metodo di Eulero-Cauchy, p. 31. — 8. Applicazione delle serie di potenze, p. 34. — 9. Integrale generale e soluzioni singolari, p. 36. — 10. Equazioni implicite rispetto a y' , p. 38. — 11. Equazione di Clairaut, p. 40. — 12. Equazione di Lagrange, p. 44. — 13. Inviluppi di una famiglia di curve e soluzioni singolari, p. 45. — 14. Traiettorie isogene, p. 49.
- 52 § 2. *Equazioni differenziali di ordine superiore e sistemi di equazioni*
15. Concetti generali, p. 52. — 16. Metodi di integrazione grafici delle equazioni differenziali del secondo ordine, p. 54. — 17. Equazione $y^{(n)} = f(x)$, p. 57. — 18. Abbassamento dell'ordine di un'equazione differenziale, p. 59. — 19. Sistemi di equazioni differenziali ordinario, p. 63. — 20. Esempi, p. 67. — 21. Sistemi di equazioni ed equazioni di ordine superiore, p. 72. — 22. Equazioni lineari alla derivata parziali, p. 74. — 23. Interpretazione geometrica, p. 77. — 24. Esempi, p. 79.
- II. Equazioni differenziali lineari e nozioni supplementari relative alla teoria delle equazioni differenziali
- 83 § 3. *Teoria generale ed equazioni a coefficienti costanti*
25. Equazioni lineari omogenee del secondo ordine, p. 83. — 26. Equazioni lineari non omogenee del secondo ordine, p. 87. — 27. Equazioni lineari di ordine superiore, p. 88. — 28. Equazioni omogenee del secondo ordine a coefficienti costanti, p. 90. — 29. Equazioni lineari non omogenee del secondo ordine a coefficienti costanti, p. 93. — 30. Casi particolari, p. 95. — 31. Radici delle soluzioni e soluzioni oscillanti, p. 97. — 32. Equazioni lineari di ordine superiore a coefficienti costanti, p. 100. — 33. Equazioni lineari e fenomeni oscillatori, p. 102. — 34. Oscillazioni proprie e oscillazioni forzate, p. 105. — 35. Forza esterna sinu-

soidale e risonanza, p. 107.— 36. Problemi al contorno, p. 112.— 37. Esempi, p. 115.— 38. Metodo simbolico, p. 116.— 39. Equazioni lineari omogenee di ordine superiore a coefficienti costanti, p. 119.— 40. Equazioni lineari non omogenee a coefficienti costanti, p. 122.— 41. Esempio, p. 123.— 42. Equazione di Eulero, p. 124.— 43. Sistemi di equazioni lineari a coefficienti costanti, p. 127.— 44. Esempi, p. 131.

134 § 4. *Integrazione mediante serie di potenze*

45. Integrazione di un'equazione lineare mediante una serie di potenze, p. 134.— 46. Esempi, p. 137.— 47. Sviluppo della soluzione in una serie di potenze generalizzata, p. 139.— 48. Equazione di Bessel, p. 141.— 49. Equazioni riducibili all'equazione di Bessel, p. 145.

147 § 5. *Nozioni supplementari relative alla teoria delle equazioni differenziali*

50. Metodo delle approssimazioni successive per le equazioni lineari, p. 147.— 51. Caso di un'equazione non lineare, p. 155.— 52. Complementi al teorema di esistenza e di unicità, p. 162.— 53. Convergenza del metodo di Eulero-Cauchy, p. 165.— 54. Punti singolari delle equazioni differenziali del primo ordine, p. 168.— 55. Sistemi autonomi, p. 177.— 56. Esempi, p. 180.

III. Integrali multipli e curvilinei. Integrali impropri e integrali dipendenti da un parametro

187 § 6. *Integrali multipli*

57. Volumi, p. 187.— 58. Integrale doppio, p. 191.— 59. Calcolo di un integrale doppio, p. 193.— 60. Coordinate curvilinee, p. 198.— 61. Integrale triplo, p. 201.— 62. Coordinate cilindriche e sferiche, p. 206.— 63. Coordinate curvilinee nello spazio, p. 212.— 64. Proprietà fondamentali degli integrali multipli, p. 214.— 65. Area di una superficie, p. 215.— 66. Integrali di superficie e formula di Ostrogradskij, p. 219.— 67. Integrali su una determinata faccia di una superficie, p. 223.— 68. Momenti, p. 225.

229 § 7. *Integrali curvilinei*

69. Definizione di un integrale curvilineo, p. 229.— 70. Lavoro di un campo di forze. Esempi, p. 234.— 71. Area e integrale curvilineo, p. 238.— 72. Formula di Green, p. 241.— 73. Formula di Stokes, p. 243.— 74. Indipendenza di un integrale curvilineo dal cammino di integrazione nel piano, p. 246.— 75. Caso di un dominio connesso, p. 252.— 76. Indipendenza di un integrale curvilineo dal cammino di integrazione nello spazio, p. 254.— 77. Movimento stazionario di un fluido, p. 256.— 78. Fattore integrante, p. 258.— 79. Equazione ai differenziali totali nel caso di tre variabili, p. 263.— 80. Cambiamento di variabili in un integrale doppio, p. 265.

268 § 8. *Integrali impropri e integrali dipendenti da un parametro*

81. Integrazione sotto il segno di integrale, p. 268.— 82. Formula di Dirichlet, p. 270.— 83. Derivazione sotto il segno di integrale, p. 273.— 84. Esempi, p. 276.— 85. Integrali impropri

pri, p. 281.— 86. Integrali non assolutamente convergenti, p. 286.— 87. Integrali uniformemente convergenti, p. 289.— 88. Esempi, p. 293.— 89. Integrali multipli impropri, p. 296.— 90. Esempi, p. 301.

300

§ 9. *Misura e teoria dell'integrazione*

91. Introduzione, p. 306.— 92. Teoremi fondamentali, p. 309.— 93. Insiemi di numeri. Operazioni sugli insiemi puntuali, p. 311.— 94. Misura di Jordan, p. 313.— 95. Insiemi misurabili, p. 316.— 96. Indipendenza dalla scelta degli assi, p. 319.— 97. Caso di un numero qualsiasi di dimensioni, p. 321.— 98. Funzioni integrabili, p. 322.— 99. Calcolo di un integrale doppio, p. 324.— 100. Integrali dell'ordine di molteplicità n , p. 327.— 101. Esempi, p. 329.— 102. Misura esterna di Lebesgue, p. 330.— 103. Insiemi misurabili, p. 332.— 104. Funzioni misurabili, p. 338.— 105. Nozioni supplementari, p. 341.— 106. Integrale di Lebesgue, p. 343.— 107. Proprietà dell'integrale di Lebesgue, p. 346.— 108. Integrali di funzioni non limitate, p. 350.— 109. Passaggio al limite sotto il segno di integrale, p. 355.— 110. Teorema di Fubini, p. 358.— 111. Integrali su un insieme di misura infinita, p. 361.

IV. Analisi vettoriale e teoria dei campi

303

§ 10. *Elementi di algebra vettoriale*

112. Somma e differenza dei vettori, p. 363.— 113. Moltiplicazione di un vettore per uno scalare. Vettori complanari, p. 365.— 114. Decomposizione di un vettore in tre vettori non complanari, p. 366.— 115. Prodotto scalare, p. 367.— 116. Prodotto vettoriale, p. 369.— 117. Relazione fra prodotto scalare e prodotto vettoriale, p. 372.— 118. Velocità dei punti di un solido rotante; momento angolare di un vettore, p. 374.

306

§ 11. *Teoria dei campi*

119. Derivazione di un vettore, p. 376.— 120. Campo scalare e suo gradiente, p. 378.— 121. Campo vettoriale; divergenza e rotore, p. 382.— 122. Campo potenziale e campo solenoidale, p. 386.— 123. Elemento di superficie orientato, p. 388.— 124. Alcune formule dell'analisi vettoriale, p. 390.— 125. Movimento di un solido e piccola deformazione, p. 392.— 126. Equazione di continuità, p. 394.— 127. Equazioni dell'idrodinamica di un fluido perfetto, p. 397.— 128. Equazione della propagazione del suono, p. 398.— 129. Equazione del calore, p. 400.— 130. Equazioni di Maxwell, p. 402.— 131. Espressione dell'operatore di Laplace in coordinate ortogonali, p. 404.— 132. Derivazione nel caso di un campo variabile, p. 410.

V. Elementi di geometria differenziale

417

§ 12. *Curve nel piano e nello spazio*

133. Curve piane, curvatura ed evoluta, p. 417.— 134. Evolvente, p. 424.— 135. Equazione naturale di una curva, p. 425.— 136. Elementi fondamentali di una curva nello spazio, p. 427.— 137. Formule di Frenet, p. 431.— 138. Piano osculatore, p. 432.— 139. Eliche, p. 433.— 140. Campo di versori, p. 435.

§ 13. *Elementi di teoria delle superfici*

141. Equazioni parametriche di una superficie, p. 436.— 142. Prima forma differenziale di Gauss, p. 438.— 143. Seconda forma differenziale di Gauss, p. 440.— 144. Curvatura di curve tracciate su una superficie, p. 442.— 145. Indicatrice di Dupin e formula di Eulero, p. 445.— 146. Determinazione dei raggi di curvatura principali e dei versi principali, p. 448.— 147. Linee di curvatura, p. 450.— 148. Teorema di Dupin, p. 453.— 149. Esempi, p. 454.— 150. Curvatura di Gauss, p. 456.— 151. Variazione di un elemento di superficie e curvatura media, p. 457.— 152. Involuppo di una famiglia di superfici e di curve, p. 460.— 153. Superfici sviluppabili, p. 463.

VI. Serie di Fourier

§ 14. *Analisi armonica*

154. Ortogonalità delle funzioni trigonometriche, p. 466.— 155. Teorema di Dirichlet, p. 471.— 156. Esempi, p. 473.— 157. Sviluppo nell'intervallo $(0, \pi)$, p. 475.— 158. Funzioni periodiche di periodo 2π , p. 481.— 159. Errore quadratico medio, p. 483.— 160. Sistemi generali di funzioni ortogonali, p. 488.— 161. Classe L_2 , p. 494.— 162. Convergenza in media, p. 496.— 163. Sistemi ortonormali in L_2 , p. 499.

§ 15. *Complementi alla teoria delle serie di Fourier*

164. Sviluppo in serie di Fourier, p. 502.— 165. Secondo teorema della media, p. 507.— 166. Integrale di Dirichlet, p. 511.— 167. Teorema di Dirichlet, p. 515.— 168. Approssimazione alle funzioni continue con polinomi, p. 517.— 169. Formula di chiusura, p. 522.— 170. Convergenza delle serie di Fourier, p. 525.— 171. Miglioramento della convergenza delle serie di Fourier, p. 529.— 172. Esempio, p. 532.

§ 16. *Integrale di Fourier e serie di Fourier multiple*

173. Formula di Fourier, p. 534.— 174. Serie di Fourier in forma complessa, p. 542.— 175. Serie di Fourier multiple, p. 543.

VII. Equazioni alle derivate parziali
della fisica matematica§ 17. *Equazione d'onda*

176. Equazione delle corde vibranti, p. 546.— 177. Soluzione di D'Alembert, p. 550.— 178. Casi particolari, p. 553.— 179. Corde finite, p. 559.— 180. Metodo di Fourier, p. 564.— 181. Armoniche e onde stazionarie, p. 566.— 182. Vibrazioni forzate, p. 569.— 183. Forza concentrata in un punto, p. 572.— 184. Formula di Poisson, p. 576.— 185. Onde cilindriche, p. 581.— 186. Caso di uno spazio a n dimensioni, p. 582.— 187. Equazione d'onda non omogenea, p. 584.— 188. Sorgente puntuale, p. 588.— 189. Vibrazioni trasversali delle membrane, p. 589.— 190. Membrana rettangolare, p. 590.— 191. Membrana circolare, p. 594.— 192. Teorema di unicità, p. 602.— 193. Applicazione dell'integrale di Fourier, p. 604.

§ 18. *Equazione telegrafica*

194. Equazioni fondamentali, p. 606.— 195. Regimi stazionari, p. 608.— 196. Regimi transitori, p. 610.— 197. Esempi, p. 613.— 198. Equazione generalizzata di una corda vibrante, p. 616.— 199. Caso generale di un circuito illimitato, p. 620.— 200. Metodo di Fourier per un circuito limitato, p. 622.— 201. Equazione d'onda generalizzata, p. 626.

§ 19. *Equazione di Laplace*

202. Funzioni armoniche, p. 629.— 203. Formula di Green, p. 630.— 204. Proprietà fondamentali delle funzioni armoniche, p. 635.— 205. Soluzione del problema di Dirichlet per un cerchio, p. 639.— 206. Integrale di Poisson, p. 643.— 207. Problema di Dirichlet per una sfera, p. 648.— 208. Funzione di Green, p. 652.— 209. Caso di un semispazio, p. 653.— 210. Potenziale delle masse estese nello spazio, p. 655.— 211. Equazione di Poisson, p. 658.— 212. Formula di Kirchhoff, p. 662.

§ 20. *Equazione della conduzione termica*

213. Equazioni fondamentali, p. 665.— 214. Sbarra illimitata, p. 666.— 215. Sbarra limitata a un estremo, p. 672.— 216. Sbarra limitata da entrambi gli estremi, p. 677.— 217. Osservazioni supplementari, p. 680.— 218. Caso di una sfera, p. 681.— 219. Teorema di unicità, p. 683.

Indice analitico