

CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE
MONOGRAFIE MATEMATICHE

18.

GUIDO ZAPPA

FONDAMENTI
DI
TEORIA DEI GRUPPI

VOLUME II



EDIZIONI CREMONESE
ROMA

INDICE

PREFAZIONE	Pag. ix
----------------------	---------

CAP. VIII. GRUPPI LIBERI E PRODOTTI LIBERI

§ 1. *Gruppi liberi*

1. Definizione di gruppo libero	Pag. 1
2. Gruppi dati mediante generatori e relazioni definitorie. I gruppi come immagini omomorfe di gruppi liberi	* 5
3. Esempi	* 10
4. Cambiamento del sistema di generatori e di quello di relazioni definitorie ad esso legato	* 14

§ 2. *Sottogruppi dei gruppi liberi*

5. Ordinamento degli elementi di un gruppo libero a base al più numerabile	* 18
6. Sistema canonico dei rappresentanti dei laterali di un sottogruppo di un gruppo libero a base numerabile	* 20
7. Teorema di Nielsen-Schreier	* 21
8. Rango di un gruppo libero. Rango di un sottogruppo d'indice finito di un gruppo libero	* 28

§ 3. *Prodotti liberi di gruppi*

9. Prodotto libero di un insieme di gruppi	* 31
10. Proprietà dei prodotti liberi. Prodotto libero di sottogruppi	* 34
11. I gruppi liberi come prodotti liberi di gruppi ciclici infiniti. Altri esempi di prodotti liberi	* 39

§ 4. *Prodotti liberi con sottogruppo amalgamato*

12. Amalgami. Amalgami legati a un insieme di gruppi	Pag.	47
13. Gruppo liberamente generato da un amalgama. Prodotto libero con sottogruppo amalgamato	*	49
14. Proprietà dei prodotti liberi con sottogruppo amalgamato	*	51

Complementi

1. Complementi sui teoremi generali dei gruppi liberi	*	56
2. Altre proprietà dei sottogruppi dei gruppi liberi. Sottogruppi verbali di un gruppo. Gruppi relativamente liberi	*	58
3. Problema delle parole, delle trasformazioni, degli isomorfismi	*	61
4. Altri risultati sui prodotti liberi con sottogruppo amalgamato. Prodotti diretti con sottogruppo amalgamato	*	61

CAP. IX. LA TEORIA DELL'AMPLIAMENTO

§ 1. *Gruppi di coomologia*

1. Cocatene, cocicli e cobordi	*	64
2. I gruppi di coomologia	*	66

§ 2. *L'ampliamento di un gruppo*

3. Sistemi di automorfismi e sistemi di fattori	*	67
4. Ampliamento di un gruppo	*	70
5. Equivalenza tra sistemi di automorfismi e di fattori. Gruppi N-isomorfi	*	75
6. Ampliamenti che si spezzano	*	79

§ 3. *Riduzione degli ampliamenti agli ampliamenti dei gruppi abeliani*

7. Ampliamenti di un gruppo abeliano	*	81
8. Relazioni tra ampliamenti di un gruppo non abeliano e ampliamenti di un gruppo abeliano	*	85

§ 4. Ampliamento mediante un gruppo ciclico

9. Ampliamento mediante un gruppo ciclico infinito	Pag.	89
10. Ampliamento mediante un gruppo ciclico finito		91

§ 5. Primo teorema di Gaschütz
sullo spezzamento degli ampliamenti di gruppi abeliani

11. Primo teorema di Gaschütz		94
---	--	----

Complementi

1. Ampliamento di un gruppo mediante un gruppo abe- lianico dotato di un sistema finito di generatori		98
2. Metodo di Baer per l'ampliamento di un gruppo abe- lianico		99

CAP. X. TEOREMI DI SYLOW E LORO GENERALIZZAZIONI.
PRIME PROPRIETÀ DEI p -GRUPPI

§ 1. π -gruppi e p -gruppi, π -sottogruppi di Sylow

1. Definizione di π -elemento (p -elemento) e di π -gruppo (p -gruppo)		101
2. Sottogruppi di Sylow e sottogruppi di Sylow genera- lizzati		102
3. Normalizzanti dei π -sottogruppi di Sylow		103
4. π -sottogruppi di Sylow dei sottogruppi normali		104

§ 2. I teoremi di Sylow

5. Primo teorema di Sylow		105
6. Teorema di Cauchy ed altre conseguenze		106
7. Il secondo teorema di Sylow		109
8. Conseguenze del secondo teorema di Sylow		111

§ 3. Prime proprietà dei p -gruppi

9. p -gruppi con un sottogruppo normale d'ordine finito		113
10. Nilpotenza dei p -gruppi finiti. Subnormalità dei sot- togruppi di un p -gruppo finito.		114

11. Sui p -gruppi con un sottogruppo proprio d'indice finito. Serie principale di un p -gruppo finito	Pag. 115
12. Indice del centro e del derivato di un p -gruppo. Sottogruppi normali d'ordine p	* 117
13. Gruppi non abeliani d'ordine p^3	* 118
 § 4. Prime proprietà dei gruppi nilpotenti e risolubili finiti. <i>Teorema di Schmidt-Iwasawa.</i> <i>Proprietà del sottogruppo di Frattini</i>	
14. Prodotti diretti di gruppi risolubili e nilpotenti. Categorizzazione dei gruppi finiti nilpotenti e risolubili	* 122
15. Teorema di Schmidt-Iwasawa	* 126
16. Proprietà del sottogruppo di Frattini.	* 128

§ 5. Teoremi di tipo Sylow

17. Sottogruppi di Hall di un gruppo finito. Teorema di Wielandt	* 130
18. Altro teorema tipo Sylow	* 133
19. Teorema di Schur	* 136
20. Secondo teorema di Gaschütz	* 137
21. Teorema di Zassenhaus	* 139

Complementi

1. Generalizzazione del teorema di Zassenhaus	* 145
2. Altri teoremi tipo Sylow	* 146

CAP. XI. GRUPPI FINITI RISOLUBILI.
II-PROPRIETÀ DEI GRUPPI

§ 1. Gruppi π -separabili e π -risolubili

1. Gruppi π -separabili	* 148
2. Gruppi π -risolubili	* 150
3. Teorema di Hall-Cunihin	* 151
4. Altra estensione dei teoremi di Sylow per i gruppi π -risolubili	* 154
5. Sistemi di Sylow nei gruppi π -risolubili	* 155
6. Normalizzanti di sistema nei gruppi finiti risolubili	* 159
7. Sottogruppi anormali. Sottogruppi di Carter. Primo teorema di Carter	* 167
8. Secondo teorema di Carter	* 170

§ 2. Gruppi supersolubili e π -supersolubili

9. Gruppi finiti π -supersolubili. Teorema di Wendt-Cunihin	Pag. 173
10. Sui sottogruppi di un gruppo finito supersolubile	* 179
11. Teorema di Huppert	* 181
12. Alcune caratterizzazioni dei gruppi finiti supersolubili	* 188

Complementi

1. Altre proprietà dei normalizzanti di sistema	* 193
2. Sottogruppi prefrettiniani di un gruppo finito risolubile	* 193
3. Sulla p -lunghezza dei gruppi p -risolubili	* 195
4. Teoria delle formazioni di Gaschütz	* 196
5. Generalizzazione del concetto di normalizzante di sistema	* 199
6. Gruppi finiti in cui ogni sottogruppo massimo ha supplemento ciclico	* 200

CAP. XII. SULLA STRUTTURA DEI p -GRUPPI FINITI

§ 1. Basi di un p -gruppo finito.

p -gruppi finiti con un solo sottogruppo di dato ordine

1. Il sottogruppo di Frattini di un p -gruppo finito	* 202
2. Basi di un p -gruppo finito	* 203
3. Il gruppo generalizzato dei quaternioni	* 204
4. p -gruppi finiti con un solo sottogruppo di dato ordine	* 205

§ 2. La teoria di Philip Hall e i p -gruppi regolari

5. Un lemma aritmetico	* 208
6. Sviluppo di $(ab)^n$. La riunione dei commutatori. I contrassegni	* 211
7. Calcolo degli esponenti dei commutatori riuniti ad un dato stadio	* 216
8. Teorema di P. Hall e sue prime conseguenze	* 220
9. p -gruppi regolari	* 223

Complementi

1. Ulteriori proprietà dei p -gruppi regolari	* 228
2. Elementi di Engel e gruppi nilpotenti	* 228
3. Esistenza, per ogni p -gruppo finito non abeliano, di	

un automorfismo esterno il cui ordine è potenza di p	Pag. 230
4. Amalgami di ϕ -gruppi	* 230
5. Problema di Hughes	* 231

CAP. XIII. GRUPPI DI PERMUTAZIONI

§ 1. *Notioni introduttive*

1. Cicli. Trasposizioni. Decomposizione di una permutazione nel prodotto di cicli operanti su oggetti diversi e nel prodotto di trasposizioni	* 233
2. Permutazioni coniugate in S_n	* 237
3. Permutazioni pari e dispari. Gruppo alterno	* 238
4. Risolubilità del gruppo totale su n oggetti per $n \leq 4$	* 243
5. Semplicità del gruppo alterno A_n per $n > 4$	* 244

§ 2. *Transitività. Rappresentazione di un gruppo come gruppo di permutazioni*

6. Gruppi di permutazioni transitivi e intransitivi	* 247
7. Rappresentazioni di un gruppo finito come gruppo di permutazioni	* 250
8. Condizione affinché due rappresentazioni siano simili	* 254

§ 3. *Gruppi sottilmente k volte transitivi*

9. Gruppi sottilmente k volte transitivi. Determinazione dei gruppi sottilmente 4 volte transitivi	* 258
10. Gruppo di Mathieu di grado 11	* 266
11. Gruppi di permutazioni sottilmente r volte transitivi con $r \geq 5$. Gruppo di Mathieu di grado 12	* 272
12. Semplicità dei gruppi di Mathieu A_{11} e A_{12}	* 275

§ 4. *Gruppi primitivi e imprimitivi. Gruppi risolubili tre volte transitivi.*

13. Gruppi primitivi e imprimitivi	* 279
14. Gruppi risolubili tre volte transitivi	* 281

Complementi

1. Gruppi di Mathieu M_{22}, M_{23}, M_{24}	* 287
2. Altri recenti risultati sui gruppi più volte transitivi. Teoremi di Marshall Hall e di Nagao	* 288

3. Ipernormalizzante di un sottogruppo e gruppi che ipernormalizzano ogni sottogruppo subnormale	Pag. 289
4. Sui gruppi finiti risolubili in cui il periodo di ogni elemento è potenza di qualche numero primo	* 290
5. Gruppi lineari e proiettivi sopra un campo	* 290
6. Gruppi simplettici sopra un campo	* 292
7. Gruppi ortogonali	* 294
8. Gruppi unitari	* 296
9. Algebre di Lie. Algebra di Lie sopra il gruppo lineare $GL(n, H)$	* 298
10. Algebre di Lie e gruppi semplici. Gruppi di Chevalley, di Steinberg e Tits, di Suzuki e di Ree	* 299
11. Gruppi semplici di Janko	* 301
12. Gruppo semplice di D. Higman e Ch. Sims	* 302
13. Gruppi finiti semplici non abeliani minimi	* 302

CAP. XIV. GRUPPI DI SOSTITUZIONI MONOMIALI.
TRASLATO DI UN GRUPPO E APPLICAZIONI

§ 1. *Gruppi di sostituzioni monomiali*

1. Sostituzioni monomiali	* 304
2. Rappresentazione di un gruppo finito come gruppo di sostituzioni monomiali	* 305

§ 2. *Il traslato di un gruppo. Teoremi di Burnside e di Grün*

3. Gruppi di sostituzioni monomiali a coefficienti in un gruppo abeliano e loro traslati.	* 309
4. Traslato di un gruppo finito.	* 310
5. Il teorema di Burnside	* 312
6. Il primo teorema di Grün	* 315
7. Il secondo teorema di Grün	* 320

§ 3. *Esistenza di complementi normali*

8. Gruppi p -omogenei	* 323
9. Teorema di Frobenius	* 326
10. Sistemi privilegiati di rappresentanti	* 328
11. Un criterio di esistenza di un complemento normale	* 331
12. Conseguenze del precedente teorema	* 334

Complementi

1. La teoria delle rappresentazioni lineari di un gruppo	Pag. 338
2. Risolubilità dei gruppi di ordine $p^m q^n$ e caratterizzazioni dei gruppi finiti risolubili	341
3. Teorema di Feit e Thompson sulla risolubilità dei gruppi d'ordine dispari	342
4. Sulla caratterizzazione di alcuni gruppi mediante il centralizzante di un elemento di periodo 2	343
5. Esistenza di complementi di Hall normali. Gruppi p -risolubili di p -lunghezza 1	344
6. Il problema di Burnside	345
7. Gruppi di Frobenius e automorfismi privi di coincidenze	348
8. Partizioni ed S -partizioni dei gruppi	350

CAP. XV. PRODOTTI INTRECCIATI.
FATTORIZZAZIONE DEI GRUPPI

§ 1. *Prodotto intrecciato di due gruppi*

1. Prodotto diretto di sottogruppi isomorfi e suoi automorfismi notevoli	353
2. Prodotto intrecciato di due gruppi	355
3. Il prodotto intrecciato di due gruppi finiti come gruppo di permutazioni	356
4. Immersione di un ampliamento in un prodotto intrecciato. Teorema di Kaloujnine e Krasner	359
5. Sottogruppi di Sylow del gruppo totale di permutazioni su n oggetti	360

§ 2. *Fattorizzazione dei gruppi*

6. Gruppi prodotto di due sottogruppi a intersezione unitaria	366
7. Costruzione di gruppi prodotto di due sottogruppi isomorfi a due gruppi dati	370
8. Caso in cui le applicazioni associate sono automorfismi. Teorema di Szép	375
9. Gruppi fattorizzabili mediante due sottogruppi abeliani. Teorema di Ito	378
10. Gruppi fattorizzabili mediante due sottogruppi ciclici. Teorema di Huppert	379

Complementi

1. Prodotto intrecciato sghembo	Pag. 388
2. Prodotto completo di due gruppi	* 389
3. Immersione di un gruppo prodotto di due sottogruppi permutabili in un conveniente prodotto intrecciato	* 389
4. Teorema di Wielandt-Kegel sulla fattorizzazione.	* 390
5. Prodotti di Redei e loro particolarizzazioni	* 391
6. Varietà di grappi.	* 392
7. Gruppi critici e loro proprietà	* 394
 BIBLIOGRAFIA.	* 397
 INDICE ANALITICO.	* 409