

CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE  
MONOGRAFIE MATEMATICHE

---

18.

GUIDO ZAPPA

FONDAMENTI  
DI  
TEORIA DEI GRUPPI  
VOLUME II



EDIZIONI CREMONESE  
ROMA

# INDICE

PREFAZIONE . . . . .	Pag. IX
----------------------	---------

## CAP. VIII. GRUPPI LIBERI E PRODOTTI LIBERI

### § 1. *Gruppi liberi*

1. Definizione di gruppo libero . . . . .	Pag. 1
2. Gruppi dati mediante generatori e relazioni definitrici. I gruppi come immagini omomorfe di gruppi liberi . . . . .	* 5
3. Esempi . . . . .	* 10
4. Cambiamento del sistema di generatori e di quello di relazioni definitrici ad esso legato . . . . .	* 14

### § 2. *Sottogruppi dei gruppi liberi*

5. Ordinamento degli elementi di un gruppo libero a base al più numerabile . . . . .	* 18
6. Sistema canonico dei rappresentanti dei laterali di un sottogruppo di un gruppo libero a base numerabile . . . . .	* 20
7. Teorema di Nielsen-Schreier . . . . .	* 21
8. Rango di un gruppo libero. Rango di un sottogruppo d'indice finito di un gruppo libero . . . . .	* 28

### § 3. *Prodotti liberi di gruppi*

9. Prodotto libero di un insieme di gruppi . . . . .	* 31
10. Proprietà dei prodotti liberi. Prodotto libero di sottogruppi . . . . .	* 34
11. I gruppi liberi come prodotti liberi di gruppi ciclici infiniti. Altri esempi di prodotti liberi . . . . .	* 39

§ 4. *Prodotti liberi con sottogruppo amalgamato*

12. Amalgami. Amalgami legati a un insieme di gruppi	Pag. 47
13. Gruppo liberamente generato da un amalgama. Prodotto libero con sottogruppo amalgamato . . . . .	* 49
14. Proprietà dei prodotti liberi con sottogruppo amalgamato . . . . .	* 51

*Complementi*

1. Complementi sui teoremi generali dei gruppi liberi	* 56
2. Altre proprietà dei sottogruppi dei gruppi liberi. Sottogruppi verbali di un gruppo. Gruppi relativamente liberi . . . . .	* 58
3. Problema delle parole, delle trasformazioni, degli isomorfismi . . . . .	* 61
4. Altri risultati sui prodotti liberi con sottogruppo amalgamato. Prodotti diretti con sottogruppo amalgamato . . . . .	* 61

CAP. IX. LA TEORIA DELL'AMPLIAMENTO

§ 1. *Gruppi di coomologia*

1. Cocatene, cocicli e cobordi . . . . .	* 64
2. I gruppi di coomologia . . . . .	* 66

§ 2. *L'ampliamento di un gruppo*

3. Sistemi di automorfismi e sistemi di fattori . . . . .	* 67
4. Ampliamento di un gruppo . . . . .	* 70
5. Equivalenza tra sistemi di automorfismi e di fattori. Gruppi N-isomorfi . . . . .	* 75
6. Ampliamenti che si spezzano . . . . .	* 79

§ 3. *Riduzione degli ampliamenti  
agli ampliamenti dei gruppi abeliani*

7. Ampliamenti di un gruppo abeliano . . . . .	* 81
8. Relazioni tra ampliamenti di un gruppo non abeliano e ampliamenti di un gruppo abeliano . . . . .	* 85

§ 4. *Ampliamento mediante un gruppo ciclico*

9. Ampliamento mediante un gruppo ciclico infinito . . .	Pag. 89
10. Ampliamento mediante un gruppo ciclico finito . . .	91

§ 5. *Primo teorema di Gaschütz  
sullo spezzamento degli ampliamenti di gruppi abeliani*

11. Primo teorema di Gaschütz . . . . .	94
---	----

*Complementi*

1. Ampliamento di un gruppo mediante un gruppo abeliano dotato di un sistema finito di generatori . . .	98
2. Metodo di Baer per l'ampliamento di un gruppo abeliano . . . . .	99

CAP. X. TEOREMI DI SYLOW E LORO GENERALIZZAZIONI.  
PRIME PROPRIETÀ DEI  $p$ -GRUPPI

§ 1.  $\pi$ -gruppi e  $p$ -gruppi,  $\pi$ -sottogruppi di Sylow

1. Definizione di $\pi$ -elemento ( $p$ -elemento) e di $\pi$ -gruppo ( $p$ -gruppo) . . . . .	101
2. Sottogruppi di Sylow e sottogruppi di Sylow generalizzati . . . . .	102
3. Normalizzanti dei $\pi$ -sottogruppi di Sylow . . . . .	103
4. $\pi$ -sottogruppi di Sylow dei sottogruppi normali . . . . .	104

§ 2. *I teoremi di Sylow*

5. Primo teorema di Sylow . . . . .	105
6. Teorema di Cauchy ed altre conseguenze . . . . .	106
7. Il secondo teorema di Sylow . . . . .	109
8. Conseguenze del secondo teorema di Sylow . . . . .	111

§ 3. *Prime proprietà dei  $p$ -gruppi*

9. $p$ -gruppi con un sottogruppo normale d'ordine finito . . .	113
10. Nilpotenza dei $p$ -gruppi finiti. Subnormalità dei sottogruppi di un $p$ -gruppo finito . . . . .	114

11. Sui $p$ -gruppi con un sottogruppo proprio d'indice finito. Serie principale di un $p$ -gruppo finito . . .	Pag. 115
12. Indice del centro e del derivato di un $p$ -gruppo. Sottogruppi normali d'ordine $p$ . . . . .	* 117
13. Gruppi non abeliani d'ordine $p^3$ . . . . .	* 118

§ 4. *Prime proprietà dei gruppi nilpotenti e risolubili finiti.*  
*Teorema di Schmidt-Iwasawa.*  
*Proprietà del sottogruppo di Frattini*

14. Prodotti diretti di gruppi risolubili e nilpotenti. Caratterizzazione dei gruppi finiti nilpotenti e risolubili *	122
15. Teorema di Schmidt-Iwasawa . . . . .	* 126
16. Proprietà del sottogruppo di Frattini. . . . .	* 128

§ 5. *Teoremi di tipo Sylow*

17. Sottogruppi di Hall di un gruppo finito. Teorema di Wielandt . . . . .	* 130
18. Altro teorema tipo Sylow . . . . .	* 133
19. Teorema di Schur . . . . .	* 136
20. Secondo teorema di Gaschütz . . . . .	* 137
21. Teorema di Zassenhaus . . . . .	* 139

*Complementi*

1. Generalizzazione del teorema di Zassenhaus . . . .	* 145
2. Altri teoremi tipo Sylow . . . . .	* 146

CAP. XI. GRUPPI FINITI RISOLUBILI.  
 II-PROPRIETÀ DEI GRUPPI

§ 1. *Gruppi  $\pi$ -separabili e  $\pi$ -risolubili*

1. Gruppi $\pi$ -separabili . . . . .	* 148
2. Gruppi $\pi$ -risolubili . . . . .	* 150
3. Teorema di Hall-Čunihin . . . . .	* 151
4. Altra estensione dei teoremi di Sylow per i gruppi $\pi$ -risolubili . . . . .	* 154
5. Sistemi di Sylow nei gruppi $\pi$ -risolubili. . . . .	* 155
6. Normalizzanti di sistema nei gruppi finiti risolubili *	159
7. Sottogruppi anormali. Sottogruppi di Carter. Primo teorema di Carter . . . . .	* 167
8. Secondo teorema di Carter . . . . .	* 170

§ 2. Gruppi supersolubili e  $\pi$ -supersolubili

9. Gruppi finiti $\pi$ -supersolubili. Teorema di Wendt-Čunihin . . . . .	Pag. 173
10. Sui sottogruppi di un gruppo finito supersolubile . . . . .	» 179
11. Teorema di Huppert . . . . .	» 181
12. Alcune caratterizzazioni dei gruppi finiti supersolubili . . . . .	» 188

Complementi

1. Altre proprietà dei normalizzanti di sistema . . . . .	» 193
2. Sottogruppi prefraattiniani di un gruppo finito risolubile . . . . .	» 193
3. Sulla $p$ -lunghezza dei gruppi $p$ -risolubili . . . . .	» 195
4. Teoria delle formazioni di Gaschütz . . . . .	» 196
5. Generalizzazione del concetto di normalizzante di sistema . . . . .	» 199
6. Gruppi finiti in cui ogni sottogruppo massimo ha supplemento ciclico . . . . .	» 200

CAP. XII. SULLA STRUTTURA DEI  $p$ -GRUPPI FINITI

§ 1. Basi di un  $p$ -gruppo finito.

$p$ -gruppi finiti con un solo sottogruppo di dato ordine

1. Il sottogruppo di Frattini di un $p$ -gruppo finito . . . . .	» 202
2. Basi di un $p$ -gruppo finito . . . . .	» 203
3. Il gruppo generalizzato dei quaternioni . . . . .	» 204
4. $p$ -gruppi finiti con un solo sottogruppo di dato ordine . . . . .	» 205

§ 2. La teoria di Philip Hall e i  $p$ -gruppi regolari

5. Un lemma aritmetico . . . . .	» 208
6. Sviluppo di $(ab)^n$ . La riunione dei commutatori. I contrassegni . . . . .	» 211
7. Calcolo degli esponenti dei commutatori riuniti ad un dato stadio . . . . .	» 216
8. Teorema di P. Hall e sue prime conseguenze . . . . .	» 220
9. $p$ -gruppi regolari . . . . .	» 223

Complementi

1. Ulteriori proprietà dei $p$ -gruppi regolari . . . . .	» 228
2. Elementi di Engel e gruppi nilpotenti . . . . .	» 228
3. Esistenza, per ogni $p$ -gruppo finito non abeliano, di	

un automorfismo esterno il cui ordine è potenza di $p$	Pag. 230
4. Amalgami di $p$ -gruppi . . . . .	* 230
5. Problema di Hughes . . . . .	* 231

## CAP. XIII. GRUPPI DI PERMUTAZIONI

### § 1. Nozioni introduttive

1. Cicli. Trasposizioni. Decomposizione di una permutazione nel prodotto di cicli operanti su oggetti diversi e nel prodotto di trasposizioni . . . . .	* 233
2. Permutazioni coniugate in $S_n$ . . . . .	* 237
3. Permutazioni pari e dispari. Gruppo alterno . . .	* 238
4. Risolubilità del gruppo totale su $n$ oggetti per $n \leq 4$	* 243
5. Semplicità del gruppo alterno $A_n$ per $n > 4$ . . .	* 244

### § 2. Transittività. Rappresentazione di un gruppo come gruppo di permutazioni

6. Gruppi di permutazioni transitivi e intransitivi . .	* 247
7. Rappresentazioni di un gruppo finito come gruppo di permutazioni . . . . .	* 250
8. Condizione affinché due rappresentazioni siano simili	* 254

### § 3. Gruppi sottilmente $k$ volte transitivi

9. Gruppi sottilmente $k$ volte transitivi. Determinazione dei gruppi sottilmente 4 volte transitivi . . . . .	* 258
10. Gruppo di Mathieu di grado 11 . . . . .	* 266
11. Gruppi di permutazioni sottilmente $r$ volte transitivi con $r \geq 5$ . Gruppo di Mathieu di grado 12 . . . . .	* 272
12. Semplicità dei gruppi di Mathieu $A_{11}$ e $A_{12}$ . . . .	* 275

### § 4. Gruppi primitivi e imprimitivi. Gruppi risolubili tre volte transitivi.

13. Gruppi primitivi e imprimitivi . . . . .	* 279
14. Gruppi risolubili tre volte transitivi . . . . .	* 281

### Complementi

1. Gruppi di Mathieu $M_{23}$ , $M_{23}$ , $M_{24}$ . . . . .	* 287
2. Altri recenti risultati sui gruppi più volte transitivi. Teoremi di Marshall Hall e di Nagao . . . . .	* 288

3. Ipernormalizzante di un sottogruppo e gruppi che ipernormalizzano ogni sottogruppo subnormale . . .	Pag. 289
4. Sui gruppi finiti risolubili in cui il periodo di ogni elemento è potenza di qualche numero primo . . . . .	* 290
5. Gruppi lineari e proiettivi sopra un campo . . . . .	* 290
6. Gruppi simplettici sopra un campo. . . . .	* 292
7. Gruppi ortogonali . . . . .	* 294
8. Gruppi unitari . . . . .	* 296
9. Algebre di Lie. Algebra di Lie sopra il gruppo lineare $GL(n, H)$ . . . . .	* 298
10. Algebre di Lie e gruppi semplici. Gruppi di Chevalley, di Steinberg e Tits, di Suzuki e di Ree . . . . .	* 299
11. Gruppi semplici di Janko . . . . .	* 301
12. Gruppo semplice di D. Higman e Ch. Sims . . . . .	* 302
13. Gruppi finiti semplici non abeliani minimi . . . . .	* 302

## CAP. XIV. GRUPPI DI SOSTITUZIONI MONOMIALI. TRASLATO DI UN GRUPPO E APPLICAZIONI

### § 1. *Gruppi di sostituzioni monomiali*

1. Sostituzioni monomiali . . . . .	* 304
2. Rappresentazione di un gruppo finito come gruppo di sostituzioni monomiali . . . . .	* 305

### § 2. *Il traslato di un gruppo. Teoremi di Burnside e di Grön*

3. Gruppi di sostituzioni monomiali a coefficienti in un gruppo abeliano e loro traslati. . . . .	* 309
4. Traslato di un gruppo finito. . . . .	* 310
5. Il teorema di Burnside . . . . .	* 312
6. Il primo teorema di Grön . . . . .	* 315
7. Il secondo teorema di Grön . . . . .	* 320

### § 3. *Esistenza di complementi normali*

8. Gruppi $p$ -omogenei . . . . .	* 323
9. Teorema di Frobenius . . . . .	* 326
10. Sistemi privilegiati di rappresentanti . . . . .	* 328
11. Un criterio di esistenza di un complemento normale . . . . .	* 331
12. Conseguenze del precedente teorema . . . . .	* 334



*Complementi*

1. La teoria delle rappresentazioni lineari di un gruppo	Pag. 338
2. Risolubilità dei gruppi di ordine $p^m q^n$ e caratterizzazioni dei gruppi finiti risolubili	» 341
3. Teorema di Feit e Thompson sulla risolubilità dei gruppi d'ordine dispari	» 342
4. Sulla caratterizzazione di alcuni gruppi mediante il centralizzante di un elemento di periodo 2	» 343
5. Esistenza di complementi di Hall normali. Gruppi $p$ -risolubili di $p$ -lunghezza 1	» 344
6. Il problema di Burnside	» 345
7. Gruppi di Frobenius e automorfismi privi di coincidenze	» 348
8. Partizioni ed $S$ -partizioni dei gruppi	» 350

CAP. XV. PRODOTTI INTRECCIATI.  
FATTORIZZAZIONE DEI GRUPPI

§ 1. *Prodotto intrecciato di due gruppi*

1. Prodotto diretto di sottogruppi isomorfi e suoi automorfismi notevoli	» 353
2. Prodotto intrecciato di due gruppi	» 355
3. Il prodotto intrecciato di due gruppi finiti come gruppo di permutazioni	» 356
4. Immersione di un ampliamento in un prodotto intrecciato. Teorema di Kaloujnine e Krasner	» 359
5. Sottogruppi di Sylow del gruppo totale di permutazioni su $n$ oggetti	» 360

§ 2. *Fattorizzazione dei gruppi*

6. Gruppi prodotto di due sottogruppi a intersezione unitaria	» 366
7. Costruzione di gruppi prodotto di due sottogruppi isomorfi a due gruppi dati	» 370
8. Caso in cui le applicazioni associate sono automorfismi. Teorema di Szép	» 375
9. Gruppi fattorizzabili mediante due sottogruppi abeliani. Teorema di Ito	» 378
10. Gruppi fattorizzabili mediante due sottogruppi ciclici. Teorema di Huppert	» 379

*Complementi*

1. Prodotto intrecciato sghembo . . . . .	Pag. 388
2. Prodotto completo di due gruppi . . . . .	* 389
3. Immersione di un gruppo prodotto di due sottogruppi permutabili in un conveniente prodotto intrecciato . . . . .	* 389
4. Teorema di Wielandt-Kegel sulla fattorizzazione. . . . .	* 390
5. Prodotti di Redeï e loro particolarizzazioni . . . . .	* 391
6. Varietà di gruppi. . . . .	* 392
7. Gruppi critici e loro proprietà . . . . .	* 394
 BIBLIOGRAFIA. . . . .	* 397
 INDICE ANALITICO. . . . .	* 409