

CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE  
MONOGRAFIE MATEMATICHE

---

13.

GUIDO ZAPPA

FONDAMENTI  
DI  
TEORIA DEI GRUPPI

VOLUME I



EDIZIONI CREMONESE  
ROMA

# I N D I C E

PREFAZIONE . . . . .	pag. ix
----------------------	---------

## CAP. I. PRIME NOZIONI

### § 1. Semigrupper e gruppi

1. Semigrupper . . . . .	pag. 1
2. Prime proprietà . . . . .	» 2
3. Potenze di un elemento . . . . .	» 4
4. Gruppi . . . . .	» 4
5. Altra definizione di gruppo . . . . .	» 6
6. Prime proprietà dei gruppi . . . . .	» 8
7. Potenze di un elemento di un gruppo . . . . .	» 9
8. Gruppi finiti. Ordine . . . . .	» 11

### § 2. Esempi di semigrupper e di gruppi

9. Esempi di semigrupper e gruppi abeliani . . . . .	» 12
10. Applicazioni. Semigrupper e gruppi di applicazioni di un insieme in sé . . . . .	» 14
11. Gruppo delle permutazioni di un insieme finito . . . . .	» 18
12. Gruppi di simmetrie di una figura . . . . .	» 20
13. Gruppo simmetrico numerabile . . . . .	» 22
14. Gruppi di sostituzioni lineari intere . . . . .	» 22

### § 3. Omomorfismi e isomorfismi. Rappresentazioni di un gruppo

15. Omomorfismi e isomorfismi . . . . .	» 26
16. Sottogruppi di un gruppo . . . . .	» 28
17. Prime proprietà degli omomorfismi . . . . .	» 30
18. Esempi di isomorfismi . . . . .	» 31
19. Isomorfismo di ogni gruppo $G$ su un gruppo di appli- cazioni biunivoche di $G$ sopra di sé . . . . .	» 33

## § 4. Gruppi ciclici

20. Gruppi ciclici e loro proprietà . . . . .	pag. 34
21. Sottogruppi ciclici di un gruppo . . . . .	» 37
22. Sottogruppi di un gruppo ciclico . . . . .	» 37

CAP. II. SOTTOGRUPPI NORMALI E GRUPPI FATTORIALI.  
RELAZIONI DI EQUIVALENZA IN UN GRUPPO

## § 1. Il concetto di reticolo

1. Insiemi parzialmente ordinati. . . . .	» 40
2. Semireticolati e reticoli . . . . .	» 41
3. Reticoli distributivi, Reticolo dei sottoinsiemi di un insieme . . . . .	» 44

## § 2. Semigruppato dei complessi di un semigruppato o di un gruppo

4. Semigruppato semireticolati e reticolati . . . . .	» 45
5. Complessi e operazioni su di essi. . . . .	» 46

## § 3. Lateralità di un sottogruppo

6. Relazioni di congruenza sinistra (destra) in un gruppo. Lateralità di un sottogruppo. Teorema di Lagrange . . .	» 49
---	------

## § 4. Elementi e sottogruppi coniugati

7. Elementi e complessi coniugati . . . . .	» 53
8. Sottogruppi coniugati . . . . .	» 54

§ 5. Elementi e sottogruppi normali. Centro.  
Normalizzanti e centralizzanti

9. Elementi, complessi e sottogruppi normali . . . . .	» 55
10. Centro di un gruppo . . . . .	» 57
11. Normalizzanti e centralizzanti. . . . .	» 57

## § 6. Sistemi e sottogruppi fondamentali. Ceto di un gruppo

12. Elementi associati. Sistemi e sottogruppi fonamen- tali. Normocentri . . . . .	» 60
---	------

13. Ceto di un gruppo . . . . .	pag.	62
14. Un esempio di gruppo di ceto 4: il gruppo dei quaternioni . . . . .	»	63

#### § 7. Relazioni di congruenza bilaterale. Gruppi fattoriali

15. Relazioni di congruenza bilaterale. . . . .	»	66
16. Gruppi fattoriali . . . . .	»	67

### CAP. III. CORRISPONDENZE FRA GRUPPI

#### § 1. Proprietà degli omomorfismi

1. Omomorfismi e relazioni di congruenza . . . . .	»	70
2. Omomorfismo naturale di un gruppo su un suo gruppo fattoriale . . . . .	»	71
3. Altre proprietà degli omomorfismi. . . . .	»	72

#### § 2. Endomorfismi

4. Endomorfismi e loro proprietà . . . . .	»	74
5. Endomorfismi nei gruppi ciclici . . . . .	»	75
6. Sottogruppi ammissibili e pienamente invarianti. . . . .	»	77

#### § 3. Meromorfismi e automorfismi

7. Meromorfismi ed automorfismi: prime proprietà. . . . .	»	78
8. Automorfismi di un gruppo ciclico . . . . .	»	79
9. Automorfismi interni . . . . .	»	81

#### § 4. Sottogruppi caratteristici. Olomorfo

10. Elementi, complessi, e sottogruppi isotipi. Sottogruppi caratteristici . . . . .	»	82
11. Esempi di sottogruppi caratteristici; centro, norma . . . . .	»	84
12. L'olomorfo di un gruppo. . . . .	»	85

#### § 5. Gruppi con operatori

13. Insiemi di operatori in un gruppo. . . . .	»	88
14. Omomorfismi ed isomorfismi operatoriali . . . . .	»	89

15. Sottogruppi ammissibili per un insieme di operatori.	
Gruppi con operatori . . . . .	pag. 90

## CAP. IV. RETICOLI DI SOTTOGRUPPI

§ 1. *Reticolo dei sottogruppi di un gruppo con operatori*

1. Intersezione di un insieme di sottogruppi . . . . .	» 92
2. Sottogruppo generato da un complesso non vuoto.	
Unione di un insieme di sottogruppi . . . . .	» 93
3. Reticolo completo dei sottogruppi di un gruppo con operatori, e suoi sottoreticoli notevoli . . . . .	» 95

§ 2. *Sottogruppi permutabili. Reticolo dei sottogruppi normali*

4. Prodotto di sottogruppi. Sottogruppi permutabili . . . . .	» 97
5. Reticoli modulari . . . . .	» 98
6. Reticolo dei sottogruppi normali, (caratteristici, pienamente invarianti) di un gruppo . . . . .	» 100

§ 3. *Teoremi sui laterali*

7. Prodotto di due sottogruppi come insieme di laterali di uno di essi . . . . .	» 101
8. Teoremi sugli isomorfismi, Lemma di Zassenhaus . . . . .	» 102

§ 4. *Catene di sottogruppi*

9. Il concetto di catena . . . . .	» 105
10. Raffinamenti di Zassenhaus . . . . .	» 106
11. Teoremi di Schreier-Zassenhaus . . . . .	» 107
12. Catene normali complete . . . . .	» 108
13. Teorema di Jordan-Hölder . . . . .	» 109

§ 5. *Reticolo dei sottogruppi subnormali*

14. Reticoli sopramodulari e sottomodulari . . . . .	» 111
15. Sottogruppi subnormali di un gruppo . . . . .	» 111
16. Teorema di Wielandt . . . . .	» 113
17. Reticolo dei sottogruppi subnormali di un gruppo dotato di serie di composizione . . . . .	» 116

*Complementi*

1. Estensione dei teoremi di Schreier-Zassenhaus e Jordan-Hölder . . . . .	pag. 118
2. Teoremi tipo Schreier-Zassenhaus e Jordan-Hölder per le catene permutabili di un gruppo . . . . .	* 110
3. Sottogruppi subnormali permutabili. Sottogruppi seminormali . . . . .	* 121
4. Intervalli trasposti e proiettivi in un reticolo. Reti- coli quasi-modulari. Sottogruppi subnormali raggiun- gibili . . . . .	* 122
5. La torre dei gruppi d'automorfismi . . . . .	* 123

## CAP. V. SOTTOGRUPPI E CATENE NOTEVOLI

§ 1. *Commutatori e serie derivate*

1. Commutatori di due elementi in un gruppo . . . . .	* 126
2. Sottogruppo dei commutatori, o derivato, di un gruppo . . . . .	* 127
3. Derivati successivi di un gruppo. Gruppi risolubili . . . . .	* 128
4. Interderivato di due complessi di un gruppo . . . . .	* 130

§ 2. *Serie centrali*

5. Serie centrale discendente . . . . .	* 132
6. Serie centrale ascendente . . . . .	* 134
7. Esempio di gruppo a centro non pienamente invariante . . . . .	* 136
8. Gruppi nilpotenti . . . . .	* 138
9. Altre proprietà della serie centrale discendente . . . . .	* 141

§ 3. *Il sottogruppo di Frattini*

10. Il sottogruppo di Frattini . . . . .	* 145
11. Il sottogruppo di Frattini e i sottogruppi massimi . . . . .	* 146

§ 4. *Catene di sottogruppi fondamentali*

12. Gruppi con tutti elementi di periodo 1 o 2. Gruppo quadrimio . . . . .	* 148
13. Gruppi somma di tre sottogruppi . . . . .	* 149
14. Gruppi di ceto 4 . . . . .	* 151

15. Catene di sottogruppi fondamentali. Genere di un sottogruppo fondamentale e rango di un gruppo . . . . .	pag. 153
16. Disuguaglianza che lega il rango e il ceto di un gruppo finito . . . . .	» 155

### *Complementi*

1. Ulteriori risultati sui sottogruppi fondamentali. Generalizzazione di R. Magari . . . . .	» 160
2. Altri sottogruppi caratteristici notevoli . . . . .	» 162

## CAP. VI. PRODOTTI DIRETTI

### § 1. Generalità

1. Definizione . . . . .	» 164
2. Prime proprietà dei prodotti diretti . . . . .	» 164
3. Raffinamento di un prodotto diretto . . . . .	» 169
4. Prodotto diretto di gruppi assegnati . . . . .	» 173

### § 2. Relazioni tra serie di composizione e serie principali

5. Gruppi privi di sottogruppi propri caratteristici . . . . .	» 175
6. Serie principali e serie di composizione . . . . .	» 177

### § 3. Raffinamento comune di decomposizioni di un gruppo in prodotto diretto

7. Endomorfismi ed automorfismi normali di un gruppo . . . . .	» 179
8. Fattori diretti ed endomorfismi normali iterativi . . . . .	» 181
9. Raffinamenti comuni e loro esistenza . . . . .	» 184
10. Decomposizione di un gruppo in prodotto diretto di fattori irriducibili. Criteri di esistenza e di unicità . . . . .	» 189

### § 4. Raffinamenti in isomorfismo normale. Teorema di Remak-Schmidt

11. Decomposizioni in prodotti diretti ed isomorfismi normali . . . . .	» 191
12. Decomposizioni in isomorfismo normale. Fattori sostituibili. Teorema di Remak-Schmidt . . . . .	» 194

*Complementi*

1. Gruppi hamiltoniani . . . . .	pag. 201
2. Altre proprietà della norma di un gruppo . . . . .	» 201
3. Anello di Lie legato a un gruppo . . . . .	» 202
4. Generalizzazione del teorema di Remak-Schmidt . . . . .	» 205

CAP. VII. GRUPPI ABELIANI

§ 1. *Generalità*

1. Definizioni ed esempi . . . . .	» 207
2. Prime proprietà dei gruppi abeliani . . . . .	» 208
3. Divisione di un elemento per un numero. Gruppi divisibili. Sottogruppi puri . . . . .	» 210

§ 2. *Basi per i gruppi abeliani con un sistema finito di generatori*

4. Gruppi primari finiti . . . . .	» 213
5. Gruppi abeliani privi di torsione con un sistema finito di generatori . . . . .	» 215
6. Gruppi abeliani con un sistema finito di generatori . . . . .	» 221

§ 3. *Gruppi divisibili*

7. Gruppo additivo dei numeri razionali. Gruppi divisibili di rango finito senza torsione . . . . .	» 224
8. Gruppi divisibili primari. Gruppo moltiplicativo delle $p$ -radici dell'unità . . . . .	» 228
9. Sottogruppi divisibili di un gruppo . . . . .	» 229
10. Gruppi divisibili primari di rango finito . . . . .	» 231
11. Decomposizione di un gruppo abeliano divisibile di rango finito nel prodotto diretto di sottogruppi irriducibili . . . . .	» 235

§ 4. *Sottogruppi divisibili e ridotti. Gruppi di torsione di rango finito*

12. Massimo sottogruppo divisibile . . . . .	» 237
--	-------



§ 5. *Endomorfismi e automorfismi di un gruppo abeliano*

13. Il concetto di anello e di corpo . . . . .	pag. 242
14. Le classi di resti (mod. $p$ ) . . . . .	» 244
15. Anello delle sostituzioni lineari d'ordine $n$ e anello delle matrici quadrate d'ordine $n$ . . . . .	» 246
16. Anello degli endomorfismi di un gruppo abeliano . . . . .	» 248
17. Endomorfismi di un gruppo abeliano privo di torsione, con un sistema finito di generatori . . . . .	» 250
18. Gruppi abeliani elementari e loro endomorfismi . . . . .	» 256

*Complementi*

1. Basi normali . . . . .	» 259
2. Altri risultati sui gruppi divisibili . . . . .	» 261
3. Gruppi primari prodotto diretto di sottogruppi ciclici . . . . .	» 262
4. Sottogruppi puri e fattori diretti . . . . .	» 264
5. Teorema di Ulm . . . . .	» 265
6. Sottogruppi basici e gruppi abeliani primari non nu- merabili . . . . .	» 269
7. Gruppi abeliani irriducibili, interi $p$ -adici . . . . .	» 270
8. Gruppi abeliani senza torsione . . . . .	» 274
9. Gruppi abeliani misti . . . . .	» 275
10. Teorema di Hajos . . . . .	» 276
11. Moduli . . . . .	» 277
 BIBLIOGRAFIA . . . . .	» 281
INDICE ANALITICO . . . . .	» 289