

CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE
MONOGRAFIE MATEMATICHE

13.

GUIDO ZAPPA

FONDAMENTI
DI
TEORIA DEI GRUPPI

VOLUME I



EDIZIONI CREMONESE
ROMA

I N D I C E

PREFAZIONE	pag. ix
----------------------	---------

CAP. I. PRIME NOZIONI

§ 1. Semigruppi e gruppi

1. Semigruppi	pag. 1
2. Prime proprietà	» 2
3. Potenze di un elemento	» 4
4. Gruppi	» 4
5. Altra definizione di gruppo	» 6
6. Prime proprietà dei gruppi	» 8
7. Potenze di un elemento di un gruppo	» 9
8. Gruppi finiti. Ordine	» 11

§ 2. Esempi di semigruppi e di gruppi

9. Esempi di semigruppi e gruppi abeliani	» 12
10. Applicazioni. Semigruppi e gruppi di applicazioni di un insieme in sé	» 14
11. Gruppo delle permutazioni di un insieme finito	» 18
12. Gruppi di simmetrie di una figura	» 20
13. Gruppo simmetrico numerabile	» 22
14. Gruppi di sostituzioni lineari intere	» 22

§ 3. Omomorfismi e isomorfismi. Rappresentazioni di un gruppo

15. Omomorfismi e isomorfismi	» 26
16. Sottogruppi di un gruppo	» 28
17. Prime proprietà degli omomorfismi	» 30
18. Esempi di isomorfismi	» 31
19. Isomorfismo di ogni gruppo G su un gruppo di applicazioni biunivoche di G sopra di sé	» 33

§ 4. Gruppi ciclici

20. Gruppi ciclici e loro proprietà	pag. 34
21. Sottogruppi ciclici di un gruppo	» 37
22. Sottogruppi di un gruppo ciclico	» 37

CAP. II. SOTTOGRUPPI NORMALI E GRUPPI FATTORIALI.
RELAZIONI DI EQUIVALENZA IN UN GRUPPO*§ 1. Il concetto di reticolo*

1. Insiemi parzialmente ordinati	» 40
2. Semireticoli e reticoli	» 41
3. Reticoli distributivi, Reticolo dei sottoinsiemi di un insieme	» 44

§ 2. Semigruppo dei complessi di un semigruppo o di un gruppo

4. Semigruppi semireticolati e reticolati	» 45
5. Complessi e operazioni su di essi.	» 46

§ 3. Laterali di un sottogruppo

6. Relazioni di congruenza sinistra (destra) in un gruppo. Laterali di un sottogruppo. Teorema di Lagrange	» 49
---	------

§ 4. Elementi e sottogruppi coniugati

7. Elementi e complessi coniugati	» 53
8. Sottogruppi coniugati	» 54

*§ 5. Elementi e sottogruppi normali. Centro.
Normalizzanti e centralizzanti*

9. Elementi, complessi e sottogruppi normali	» 55
10. Centro di un gruppo	» 57
11. Normalizzanti e centralizzanti.	» 57

§ 6. Sistemi e sottogruppi fondamentali. Ceto di un gruppo

12. Elementi associati. Sistemi e sottogruppi fondamentali. Normocentri	» 60
---	------

13. Ceto di un gruppo	pag.	62
14. Un esempio di gruppo di ceto 4 : il gruppo dei quaternioni	*	63

§ 7. Relazioni di congruenza bilaterale. Gruppi fattoriali

15. Relazioni di congruenza bilaterale	*	66
16. Gruppi fattoriali	*	67

CAP. III. CORRISPONDENZE FRA GRUPPI

§ 1. Proprietà degli omomorfismi

1. Omomorfismi e relazioni di congruenza	*	70
2. Omomorfismo naturale di un gruppo su un suo gruppo fattoriale	*	71
3. Altre proprietà degli omomorfismi.	*	72

§ 2. Endomorfismi

4. Endomorfismi e loro proprietà	*	74
5. Endomorfismi nei gruppi ciclici	*	75
6. Sottogruppi ammissibili e pienamente invarianti.	*	77

§ 3. Meromorfismi e automorfismi

7. Meromorfismi ed automorfismi: prime proprietà	*	78
8. Automorfismi di un gruppo ciclico	*	79
9. Automorfismi interni	*	81

§ 4. Sottogruppi caratteristici. Olomorfo

10. Elementi, complessi, e sottogruppi isotipi. Sottogruppi caratteristici	*	82
11. Esempi di sottogruppi caratteristici; centro, norma	*	84
12. L'olomorfo di un gruppo.	*	85

§ 5. Gruppi con operatori

13. Insiemi di operatori in un gruppo.	*	88
14. Omomorfismi ed isomorfismi operatoriali	*	89

15. Sottogruppi ammissibili per un insieme di operatori. Gruppi con operatori	pag. 90
--	---------

CAP. IV. RETICOLI DI SOTTOGRUPPI

§ 1. Reticolo dei sottogruppi di un gruppo con operatori

1. Intersezione di un insieme di sottogruppi	92
2. Sottogruppo generato da un complesso non vuoto. Unione di un insieme di sottogruppi	93
3. Reticolo completo dei sottogruppi di un gruppo con operatori, e suoi sottoreticolli notevoli	95

§ 2. Sottogruppi permutabili. Reticolo dei sottogruppi normali

4. Prodotto di sottogruppi. Sottogruppi permutabili	97
5. Reticoli modulari	98
6. Reticolo dei sottogruppi normali, (caratteristici, pie- namente invarianti) di un gruppo	100

§ 3. Teoremi sui laterali

7. Prodotto di due sottogruppi come insieme di laterali di uno di essi	101
8. Teoremi sugli isomorfismi. Lemma di Zassenhaus	102

§ 4. Catene di sottogruppi

9. Il concetto di catena	105
10. Raffinamenti di Zassenhaus	106
11. Teoremi di Schreier-Zassenhaus	107
12. Catene normali complete	108
13. Teorema di Jordan-Hölder	109

§ 5. Reticolo dei sottogruppi subnormali

14. Reticoli sopramodulari e sottomodulari	111
15. Sottogruppi subnormali di un gruppo	111
16. Teorema di Wielandt	113
17. Reticolo dei sottogruppi subnormali di un gruppo dotato di serie di composizione	116

Complementi

1. Estensione dei teoremi di Schreier-Zassenhaus e Jordan-Hölder	pag. 118
2. Teoremi tipo Schreier-Zassenhaus e Jordan-Hölder per le catene permutabili di un gruppo	* 110
3. Sottogruppi subnormali permutabili, Sottogruppi semi-normali	* 121
4. Intervalli trasposti e proiettivi in un reticolo. Reticolli quasi-modulari. Sottogruppi subnormali raggiungibili	* 122
5. La torre dei gruppi d'automorfismi	* 123

CAP. V. SOTTOGRUPPI E CATENE NOTEVOLI

§ 1. *Commutatori e serie derivate*

1. Commutatori di due elementi in un gruppo	* 126
2. Sottogruppo dei commutatori, o derivato, di un gruppo	* 127
3. Derivati successivi di un gruppo. Gruppi risolubili	* 128
4. Interderivato di due complessi di un gruppo	* 130

§ 2. *Serie centrali*

5. Serie centrale discendente	* 132
6. Serie centrale ascendente	* 134
7. Esempio di gruppo a centro non pienamente invariante	* 136
8. Gruppi nilpotenti	* 138
9. Altre proprietà della serie centrale discendente	* 141

§ 3. *Il sottogruppo di Frattini*

10. Il sottogruppo di Frattini	* 145
11. Il sottogruppo di Frattini e i sottogruppi massimi	* 146

§ 4. *Catene di sottogruppi fondamentali*

12. Gruppi con tutti elementi di periodo 1 o 2. Gruppo quadrinomio	* 148
13. Gruppi somma di tre sottogruppi	* 149
14. Gruppi di ceto 4	* 151

15. Catene di sottogruppi fondamentali. Genere di un sottogruppo fondamentale e rango di un gruppo	pag. 153
16. Disuguaglianza che lega il rango e il ceto di un gruppo finito	* 155

Complementi

1. Ulteriori risultati sui sottogruppi fondamentali. Generalizzazione di R. Magari.	* 160
2. Altri sottogruppi caratteristici notevoli	* 162

CAP. VI. PRODOTTI DIRETTI

§ 1. Generalità

1. Definizione	* 164
2. Prime proprietà dei prodotti diretti	* 164
3. Raffinamento di un prodotto diretto	* 169
4. Prodotto diretto di gruppi assegnati	* 173

§ 2. Relazioni tra serie di composizione e serie principali

5. Gruppi privi di sottogruppi propri caratteristici	* 175
6. Serie principali e serie di composizione	* 177

§ 3. Raffinamento comune di decomposizioni di un gruppo in prodotto diretto

7. Endomorfismi ed automorfismi normali di un gruppo	* 179
8. Fattori diretti ed endomorfismi normali iterativi	* 181
9. Raffinamenti comuni e loro esistenza	* 184
10. Decomposizione di un gruppo in prodotto diretto di fattori irriducibili. Criteri di esistenza e di unicità	* 189

§ 4. Raffinamenti in isomorfismo normale. Teorema di Remak-Schmidt

11. Decomposizioni in prodotti diretti ed isomorfismi normali	* 191
12. Decomposizioni in isomorfismo normale. Fattori sostituibili. Teorema di Remak-Schmidt	* 194

Complementi

1. Gruppi hamiltoniani	pag.	201
2. Altre proprietà della norma di un gruppo	»	201
3. Anello di Lie legato a un gruppo	»	202
4. Generalizzazione del teorema di Remak-Schmidt	»	205

CAP. VII. GRUPPI ABELIANI

§ 1. *Generalità*

1. Definizioni ed esempi	»	207
2. Prime proprietà dei gruppi abeliani	»	208
3. Divisione di un elemento per un numero. Gruppi divisibili. Sottogruppi puri	»	210

§ 2. *Basi per i gruppi abeliani con un sistema finito di generatori*

4. Gruppi primari finiti	»	213
5. Gruppi abeliani privi di torsione con un sistema finito di generatori	»	215
6. Gruppi abeliani con un sistema finito di generatori	»	221

§ 3. *Gruppi divisibili*

7. Gruppo additivo dei numeri razionali. Gruppi divisibili di rango finito senza torsione	»	224
8. Gruppi divisibili primari. Gruppo moltiplicativo delle β -radici dell'unità	»	228
9. Sottogruppi divisibili di un gruppo	»	229
10. Gruppi divisibili primari di rango finito	»	231
11. Decomposizione di un gruppo abeliano divisibile di rango finito nel prodotto diretto di sottogruppi irriducibili	»	235

§ 4. *Sottogruppi divisibili e ridotti. Gruppi di torsione di rango finito*

12. Massimo sottogruppo divisibile	»	237
--	---	-----

§ 5. Endomorfismi e automorfismi di un gruppo abelliano

13. Il concetto di anello e di corpo	pag.	242
14. Le classi di resti (mod. p)	»	244
15. Anello delle sostituzioni lineari d'ordine n e anello delle matrici quadrate d'ordine n	»	246
16. Anello degli endomorfismi di un gruppo abelliano	»	248
17. Endomorfismi di un gruppo abelliano privo di torsione, con un sistema finito di generatori	»	250
18. Gruppi abelliani elementari e loro endomorfismi	»	256

Complementi

1. Basi normali	»	259
2. Altri risultati sui gruppi divisibili	»	261
3. Gruppi primari prodotto diretto di sottogruppi ciclici	»	262
4. Sottogruppi puri e fattori diretti.	»	264
5. Teorema di Ulm	»	265
6. Sottogruppi basici e gruppi abelliani primari non numerabili	»	269
7. Gruppi abelliani irriducibili, interi p -adici	»	270
8. Gruppi abelliani senza torsione	»	274
9. Gruppi abelliani misti	»	275
10. Teorema di Hajos	»	276
11. Moduli	»	277
 BIBLIOGRAFIA	»	281
INDICE ANALITICO	»	289