



Didattica e ricerca  
Manuali

# Dispense di Geometria

*Tullio Franzoni*



EDIZIONI PLUS  
Università di Pisa

# Indice

<b>Prefazione</b>	3
<b>Indice</b>	5
<b>Introduzione</b>	9
0.1 Notazioni di teoria degli insiemi	9
0.2 I primi insiemi numerici	13
0.3 Strutture algebriche: gruppi	16
0.4 Gruppi di sostituzioni	19
0.5 Numeri complessi (introduzione)	21
0.6 Strutture algebriche: corpi	23
<b>1 Geometria Vettoriale</b>	25
1.1 I vettori applicati dello spazio euclideo	25
1.2 Basi, Coordinate rispetto a una base	27
1.3 Espressione vettoriale di rette e piani	27
1.4 Il prodotto scalare tra vettori geometrici	28
<b>2 Spazi Vettoriali (prima parte)</b>	31
2.1 $\mathbb{R}^n$ . Spazi vettoriali	31
2.2 Combinazioni lineari. Dipendenza lineare. Basi	33
2.3 Sottospazi vettoriali	36
2.4 Applicazioni lineari. Matrici	37
<b>3 Matrici – Sistemi Lineari</b>	41
3.1 Matrici – Operazioni tra matrici	41
3.2 Il determinante. La regola di Cramer	43
3.3 Il teorema di Binet. L'inversa di una matrice quadrata	49
3.4 La caratteristica di una matrice	51
3.5 Il teorema di Rouché-Capelli	54

3.6 I sistemi lineari omogenei	55
<b>4 Sistemi di Riferimento – Coordinate Cartesiane</b>	<b>57</b>
4.1 Sistemi di riferimento su una retta, su un piano, nello spazio	57
4.2 Equazioni parametriche di una retta e di un piano	58
4.3 Equazioni cartesiane di una retta e di un piano	60
4.4 Fasci di rette e piani	64
4.5 Sistemi di riferimento monometrici ortogonali. La distanza	65
4.6 Cambiamenti di coordinate	69
4.7 Cambiamenti di coordinate ortogonali	71
<b>5 Spazi Vettoriali (seconda parte)</b>	<b>73</b>
5.1 Il teorema di Grassmann	73
5.2 Il nucleo e l'immagine di un'applicazione lineare	74
5.3 Coordinate in uno spazio vettoriale	75
5.4 Rappresentazione delle applicazioni lineari mediante matrici	75
5.5 Cambiamento delle coordinate relativamente a due basi	76
5.6 Cambiamento della rappresentazione	77
5.7 La somma diretta	77
5.8 Lo spazio vettoriale $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$	78
<b>6 Prodotto Scalare canonico</b>	<b>79</b>
6.1 Il prodotto scalare canonico	79
6.2 Le matrici ortogonali	80
<b>7 Affinità</b>	<b>83</b>
7.1 Affinità tra due rette	83
7.2 Affinità tra due piani e affinità dello spazio	84
7.3 Le isometrie	86
<b>8 Curve e Superfici nel Piano e nello Spazio</b>	<b>89</b>
8.1 Rappresentazioni parametriche e cartesiane	89
8.2 La circonferenza	90
8.3 L'ellisse	91
8.4 L'iperbole	92
8.5 La parabola	93
8.6 Coordinate polari	93
8.7 Superfici	94
8.8 La sfera	95
8.9 L'ellissoide	95

8.10 L'iperboloide iperbolico (o a una falda)	96
8.11 L'iperboloide ellittico (o a due falde)	97
8.12 Il paraboloide ellittico	97
8.13 Il paraboloide iperbolico (o a sella)	98
8.14 Curve nello spazio	98
8.15 La circonferenza nello spazio	99
8.16 L'elica	100
8.17 I coni	100
8.18 I cilindri	102
8.19 Le superfici di rotazione	103
8.20 Le coordinate cilindriche	104
8.21 Le coordinate sferiche	105
<b>9 Numeri Complessi</b>	<b>107</b>
9.1 Piano di Gauss. Teorema di d'Alembert	107
9.2 Rappresentazione trigonometrica. Radici $n$ -esime	108
9.3 Esponenziale in campo complesso	110
<b>10 Endomorfismi Lineari, Autovalori e Autovettori</b>	<b>113</b>
10.1 Endomorfismi lineari	113
10.2 Autovalori. Autovettori. Polinomio e radici caratteristiche	114
10.3 La triangolabilità	116
10.4 La diagonalizzabilità	117
10.5 Il teorema di Cayley–Hamilton	119
10.6 Le matrici nilpotenti	120
<b>11 Forme Bilineari e Prodotto Scalare</b>	<b>121</b>
11.1 Forme bilineari. Prodotto scalare	121
11.2 Il procedimento di ortonormalizzazione di Gram–Schmidt	124
11.3 Sottospazi ortogonali	126
11.4 Trasformazioni ortogonali e simmetriche	127
11.5 Il teorema di rappresentazione di Riesz	128
<b>12 Classificazione di Coniche e Quadriche</b>	<b>131</b>
12.1 Riduzione delle coniche e delle quadriche in forma canonica	131
12.2 Equazione delle coniche in forma canonica	133
12.3 Equazione delle quadriche in forma canonica	133
12.4 Classificazione mediante gli invarianti	135

<b>13 Generalità sui Fasci di Coniche</b>	<b>139</b>
13.1 Generalità sulle coniche	139
13.2 Generalità sui fasci di coniche	140
<b>14 Matrici Hermitiane e Unitarie</b>	<b>145</b>
14.1 Il prodotto hermitiano in $\mathbb{C}^n$ . Matrici hermitiane e matrici unitarie	145
14.2 Prodotti hermitiani astratti	146
<b>Appendici</b>	
<b>A Sul numero degli elementi di un insieme</b>	<b>149</b>
<b>B Il metodo di Gauss per la risoluzione dei Sistemi Lineari</b>	<b>153</b>
<b>C Il metodo di Gauss per il calcolo della Matrice Inversa</b>	<b>157</b>
<b>D Il Teorema Fondamentale dell'Algebra</b>	<b>159</b>
<b>E Il Teorema dei segni di Cartesio</b>	<b>163</b>