

Vladimir Ivanovič Smirnov

# Corso di matematica superiore

Volume terzo

Editori Riuniti

# Indice

9

## I. Elementi della teoria delle funzioni di una variabile complessa

1. Funzioni di una variabile complessa, p. 9. — 2. Derivata, p. 15. — 3. Trasformazione conforme, p. 21. — 4. Integrale, p. 24. — 5. Teorema di Cauchy, p. 27. — 6. Formula fondamentale del calcolo integrale, p. 30. — 7. Formula di Cauchy, p. 34. — 8. Integrali del tipo Cauchy, p. 40. — 9. Corollari della formula di Cauchy, p. 43. — 10. Punti singolari isolati, p. 45. — 11. Serie infinite a termini complessi, p. 47. — 12. Teorema di Weierstrass, p. 50. — 13. Serie di potenze, p. 53. — 14. Serie di Taylor, p. 55. — 15. Serie di Laurent, p. 58. — 16. Esempi, p. 62. — 17. Punti singolari isolati. Punto all'infinito, p. 67. — 18. Prolungamento analitico, p. 72. — 19. Esempi di funzioni plurivoche (o polidrome), p. 80. — 20. Punti singolari delle funzioni analitiche e superfici di Riemann, p. 88. — 21. Teorema dei residui, p. 93. — 22. Teorema sul numero delle radici, p. 96. — 23. Inversione di una serie di potenze, p. 100. — 24. Principio di simmetria, p. 103. — 25. Serie di Taylor sulla circonferenza del cerchio di convergenza, p. 108. — 26. Complementi alla formula di Cauchy, p. 111. — 27. Valore principale dell'integrale, p. 113. — 28. Valore principale dell'integrale (seguito), p. 117. — 29. Integrali del tipo Cauchy, p. 122. — 30. Integrali del tipo Cauchy (seguito), p. 128.

129

## II. Trasformazione conforme e campo piano

31. Trasformazione conforme, p. 129. — 32. Trasformazione lineare, p. 133. — 33. Trasformazione lineare fratta, p. 134. — 34. La funzione  $w = z^2$ , p. 144. — 35. La funzione  $w = \frac{k}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$ , p. 146. — 36. Dominio delimitato da due archi di circonferenza e striscia, p. 149. — 37. Teorema fondamentale, p. 152. — 38. Formula di Christoffel, p. 155. — 39. Casi particolari, p. 161. — 40. Caso dell'esterno del poligono, p. 165. — 41. Proprietà di minimo della trasformazione su di un cerchio, p. 167. — 42. Metodo delle serie trigonometriche coniugate, p. 170. — 43. Flusso piano stazionario di un fluido, p. 174. — 44. Esempi, p. 178. — 45. Problema del flusso completo attorno ad un ostacolo, p. 181. — 46. Formula di Zukovskij, p. 182. — 47. Problema elettrostatico piano, p. 184.

48. Formula di Schwarz, p. 187. — 49. Nucleo  $\cotg \frac{s-t}{2}$ , p. 189.  
 — 50. Problemi al contorno, p. 193. — 51. Equazione biarmonica, p. 198. — 52. Equazione d'onda e funzioni analitiche, p. 201.  
 — 53. Teorema fondamentale, p. 203. — 54. Diffrazione di un'onda piana, p. 210. — 55. Riflessione delle onde elastiche su una frontiera rettilinea, p. 215.

221

### III. Applicazioni della teoria dei residui. Funzioni intere e razionali

56. Integrale di Fresnel, p. 221. — 57. Integrazione di espressioni contenenti delle funzioni trigonometriche, p. 223. — 58. Integrazione di una funzione razionale, p. 225. — 59. Alcuni nuovi tipi di integrali contenenti delle funzioni trigonometriche, p. 226.  
 — 60. Lemma di Jordan, p. 229. — 61. Rappresentazione di alcune funzioni con integrali curvilinei, p. 232. — 62. Esempi di integrali di funzioni polidrome, p. 236. — 63. Integrazione di un sistema di equazioni lineari a coefficienti costanti, p. 240. — 64. Sviluppo di una funzione razionale in elementi semplici, p. 246.  
 — 65. La funzione  $\cotg z$ , p. 249. — 66. Costruzione di una funzione meromorfa, p. 252. — 67. Funzioni intere, p. 254. — 68. Prodotti infiniti, p. 258. — 69. Costruzione di una funzione intera a partire dalle sue radici, p. 259. — 70. Integrali dipendenti da un parametro, p. 263. — 71. Integrale di Eulero di seconda specie, p. 266. — 72. Integrale di Eulero di prima specie, p. 271. — 73. Prodotto infinito per la funzione  $[\Gamma(z)]^{-1}$ , p. 272. — 74. Rappresentazione di  $\Gamma(z)$  con un integrale curvilineo, p. 278. — 75. Formula di Stirling, p. 281. — 76. Formula di somma di Eulero, p. 287. — 77. Numeri di Bernoulli, p. 290. — 78. Metodo della massima pendenza, p. 292. — 79. Sviluppo asintotico di un integrale, p. 294. — 80. Esempi, p. 299. — 81. Metodo della fase stazionaria, p. 304.

307

### IV. Funzioni analitiche di più variabili e funzioni di matrici

82. Funzioni olomorfe di più variabili, p. 307. — 83. Integrale doppio e formula di Cauchy, p. 309. — 84. Serie di potenze, p. 311. — 85. Prolungamento analitico, p. 317. — 86. Funzioni di matrici. Nozioni preliminari, p. 318. — 87. Serie di potenze di una matrice, p. 320. — 88. Prodotto di serie di potenze. Inversione di una serie di potenze, p. 323. — 89. Studio ulteriore della convergenza, p. 326. — 90. Formule di interpolazione, p. 331. — 91. Identità di Cayley. Formula di Sylvester, p. 332. — 92. Determinazione della funzione di una matrice con la formula di Cauchy, p. 334. — 93. Prolungamento analitico, p. 337. — 94. Logaritmo di una matrice, p. 342. — 95. Inversione di una funzione intera di matrice nel caso di una matrice del secondo ordine, p. 344. — 96. Sistemi di equazioni lineari a coefficienti costanti, p. 346. — 97. Funzioni di più matrici, p. 354.

355

### V. Equazioni differenziali lineari

98. Sviluppo della soluzione in serie di potenze, p. 355. — 99. Prolungamento analitico della soluzione, p. 359. — 100. Intorno di un punto singolare, p. 361. — 101. Punto singolare regolare,

p. 366. — 102. Equazioni della classe di Fuchs, p. 374. — 103. Equazione di Gauss, p. 378. — 104. Serie ipergeometrica, p. 380. — 105. Polinomi di Legendre, p. 385. — 106. Polinomi di Jacobi, p. 391. — 107. Trasformazione conforme ed equazione di Gauss, p. 396. — 108. Trasformazione di Laplace, p. 400. — 109. Scelta di soluzioni, p. 402. — 110. Equazione di Bessel, p. 406. — 111. Funzioni di Hankel e rappresentazione integrale delle soluzioni dell'equazione di Bessel, p. 409. — 112. Sviluppi asintotici, p. 413. — 113. Sviluppi asintotici delle soluzioni ottenute dalla trasformazione di Laplace, p. 418. — 114. Sviluppi asintotici delle soluzioni dell'equazione di Bessel, p. 423. — 115. Degenerazione dell'equazione di Gauss, p. 427. — 116. Serie formali nell'intorno del punto singolare irregolare, p. 428. — 117. Costruzione degli sviluppi asintotici con il metodo delle approssimazioni successive, p. 431. — 118. Funzioni di Airy, p. 437. — 119. Sviluppo asintotico per grandi valori del parametro, p. 441. — 120. Equazioni a coefficienti periodici, p. 447. — 121. Condizioni di stabilità e di instabilità per l'equazione di Hill, p. 452. — 122. Sistemi di equazioni differenziali lineari, p. 461. — 123. Punto singolare regolare p. 464. — 124. Sistemi regolari, p. 467. — 125. Rappresentazione della soluzione nell'intorno di un punto singolare, p. 474. — 126. Soluzioni canoniche, p. 477. — 127. Legame con le soluzioni olomorfe del tipo Fuchs, p. 480. — 128. Caso di  $U$ , arbitrarie, p. 481. — 129. Sviluppi formali nell'intorno di un punto singolare irregolare, p. 485.

## VI. Funzioni speciali

### § 1. Funzioni sferiche e funzioni di Legendre

130. Definizione delle funzioni sferiche, p. 488. — 131. Espressioni esplicite delle funzioni sferiche, p. 490. — 132. Proprietà di ortogonalità, p. 495. — 133. Polinomi di Legendre, p. 499. — 134. Sviluppo in serie di funzioni sferiche, p. 504. — 135. Dimostrazione della convergenza, p. 507. — 136. Relazione fra le funzioni sferiche e i problemi ai limiti, p. 509. — 137. Problemi di Dirichlet e di Neumann, p. 511. — 138. Potenziale delle masse volumetriche, p. 514. — 139. Potenziale di uno strato sferico, p. 516. — 140. Elettrone in un campo centrale, p. 519. — 141. Funzioni sferiche e rappresentazioni lineari del gruppo delle rotazioni, p. 521. — 142. Funzione di Legendre, p. 523. — 143. Funzione di Legendre di seconda specie, p. 525.

### § 2. Funzioni di Bessel

144. Definizione delle funzioni di Bessel, p. 529. — 145. Relazioni fra le funzioni di Bessel, p. 531. — 146. Ortogonalità delle funzioni di Bessel e loro radici, p. 534. — 147. Funzione generatrice e rappresentazione integrale, p. 539. — 148. Formula di Fourier — Bessel, p. 543. — 149. Funzioni di Hankel e di Neumann, p. 545. — 150. Sviluppo delle funzioni di Neumann di indice intero, p. 550. — 151. Caso dell'argomento immaginario puro, p. 552. — 152. Rappresentazioni integrali nuove, p. 554. — 153. Rappresentazioni asintotiche, p. 556. — 154. Funzioni di Bessel ed equazioni di Laplace, p. 562. — 155. Equazione d'onda in coordinate cilindriche, p. 564. — 156. Equazione d'onda in coordinate sferiche, p. 567.

### § 3. Polinomi di Hermite e di Laguerre

157. Oscillatore lineare e polinomi di Hermite, p. 570. — 158. Ortogonalità, p. 574. — 159. Funzione generatrice, p. 575. — 160. Coordinate paraboliche e funzioni di Hermite, p. 577. — 161.

Polinomi di Laguerre, p. 580. — 162. Legame fra i polinomi di Hermite e di Laguerre, p. 586. — 163. Espressione asintotica dei polinomi di Hermite, p. 587. — 164. Espressione asintotica dei polinomi di Legendre, p. 590.

*§ 4. Integrali ellittici e funzioni ellittiche*

165. Riduzione degli integrali ellittici alla forma normale, p. 594. — 166. Riduzione degli integrali alla forma trigonometrica, p. 597. — 167. Esempi, p. 601. — 168. Inversione dell'integrale ellittico, p. 604. — 169. Proprietà generali delle funzioni ellittiche, p. 608. — 170. Lemma fondamentale, p. 612. — 171. Funzioni di Weierstrass, p. 614. — 172. Equazione differenziale per  $\varphi(u)$ , p. 619. — 173. Funzioni  $\sigma_k(u)$ , p. 622. — 174. Sviluppo di una funzione intera periodica, p. 625. — 175. Notazioni nuove, p. 626. — 176. La funzione  $\theta_1(v)$ , p. 628. — 177. Funzioni  $\theta_k(v)$ , p. 631. — 178. Proprietà delle funzioni theta, p. 634. — 179. Espressione dei numeri  $e_k$  in funzione di  $\theta_s$ , p. 637. — 180. Funzioni ellittiche di Jacobi, p. 640. — 181. Proprietà fondamentali delle funzioni di Jacobi, p. 642. — 182. Equazioni differenziali per le funzioni di Jacobi, p. 643. — 183. Formule della somma, p. 645. — 184. Relazione fra le funzioni  $\varphi(u)$  e  $sn(u)$ , p. 646. — 185. Coordinate ellittiche, p. 648. — 186. Introduzione delle funzioni ellittiche, p. 650. — 187. Equazione di Lamé, p. 652. — 188. Pendolo semplice, p. 653. — 189. Esempio di trasformazione conforme, p. 656.

658

**Appendice.** Riduzione delle matrici alla forma canonica 190. Proposizioni ausiliarie, p. 658. — 191. Caso delle radici semplici, p. 663. — 192. Prima tappa delle trasformazioni nel caso delle radici multiple, p. 665. — 193. Riduzione alla forma canonica, p. 669. — 194. Definizione della struttura della forma canonica, p. 675. — 195. Esempio, p. 678.