

Andrei N. Tichonov Aleksandr A. Samarskij

# Equazioni della fisica matematica

Edizioni Mir

## INDICE

Dalla prefazione alla prima edizione russa . . . . .	13
Capitolo I. Classificazione delle equazioni differenziali alle derivate parziali	
§ 1. Classificazione delle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine . . . . .	15
1. Equazioni differenziali in due variabili indipendenti (15). 2. Classificazione delle equazioni del secondo ordine in più variabili indipendenti (21). 3. Forme canoniche delle equazioni lineari a coefficienti costanti (24).	
Problemi al capitolo 1 . . . . .	25
Capitolo II. Equazioni di tipo iperbolico	
§ 1. Problemi elementari che conducono ad equazioni di tipo iperbolico. Impostazione dei problemi ai limiti . . . . .	27
1. Equazione delle piccole vibrazioni trasversali di una corda (27). 2. Equazione delle vibrazioni longitudinali nelle sbarre e nelle corde (31). 3. Energia di vibrazione di una corda (32). 4. Deduzione dell'equazione delle oscillazioni elettriche nei conduttori (34). 5. Vibrazioni trasversali di una membrana (35). 6. Equazioni idrodinamiche ed acustiche (38). 7. Condizioni iniziali e al contorno (42). 8. Riduzione del problema generale (47). 9. Impostazione dei problemi ai limiti nel caso di più variabili (49). 10. Teorema di unicità (50). Problemi (53).	
§ 2. Metodo di propagazione delle onde . . . . .	54
1. Formula di D'Alembert (54). 2. Interpretazione fisica (56). 3. Esempi (58). 4. Equazione non omogenea (62). 5. Stabilità delle soluzioni (64). 6. Retta semilimitata e metodo dei prolungamenti (67). 7. Problemi per un segmento limitato (74). 8. Dispersione delle onde (77). 9. Equazione integrale delle vibrazioni (78). 10. Distribuzione delle discontinuità lungo le caratteristiche (82). Problemi (83).	
§ 3. Metodo di separazione delle variabili . . . . .	86
1. Equazione delle vibrazioni libere di una corda (86). 2. Interpretazione della soluzione (91). 3. Rappresentazione di vibra-	

zioni arbitrarie sotto forma di sovrapposizione di onde stazionarie (16). 4. Equazioni non omogenee (160). 5. Primo problema generale ai limiti (167). 6. Problemi ai limiti con disomogeneità stazionarie (168). 7. Problemi senza condizioni iniziali (170). 8. Forza concentrata (175). 9. Schema generale del metodo di separazione delle variabili (178). Problemi (174).	
<b>§ 4. Problemi con dati relativi alle caratteristiche . . . . .</b>	<b>126</b>
1. Impostazione del problema (126). 2. Metodo delle approssimazioni successive per il problema di Goursat (127). Problemi (132).	
<b>§ 5. Risoluzione delle equazioni lineari generali di tipo iperbolico . . . . .</b>	<b>133</b>
1. Operatori differenziali coniugati (133). 2. Forma integrale della soluzione (133). 3. Interpretazione fisica della funzione di Riemann (136). 4. Equazioni a coefficienti costanti (139).	
Problemi al capitolo II . . . . .	144
Appendici al capitolo II . . . . .	144
I. Sulle vibrazioni delle corde degli strumenti musicali . . . . .	144
II. Sulle vibrazioni delle sbarre . . . . .	148
III. Vibrazioni di una corda tesa . . . . .	152
1. Impostazione del problema (152). 2. Autovibrazioni di una corda tesa (153). 3. Corda con un carico applicato a uno degli estremi (157). 4. Correzioni degli autovalori (158).	
<b>IV. Equazioni della dinamica dei gas e teoria delle onde d'urto . . . . .</b>	<b>159</b>
1. Equazioni della dinamica dei gas. Legge di conservazione dell'energia (159). 2. Onde d'urto. Condizioni di compatibilità dinamica (161). 3. Discontinuità deboli (166).	
<b>V. Dinamica dell'assorbimento dei gas . . . . .</b>	<b>170</b>
1. Equazioni descriventi il processo di assorbimento dei gas (170). 2. Soluzione asintotica (174).	
<b>VI. Analogie fisiche . . . . .</b>	<b>181</b>

### Capitolo III. Equazioni di tipo parabolico

<b>§ 1. Problemi elementari che conducono ad equazioni di tipo parabolico.</b>	
<i>Impostazione del problema ai limiti . . . . .</i>	<b>185</b>
1. Problema lineare della propagazione di calore (185). 2. Equazione della diffusione (189). 3. Propagazione di calore nello spazio (190). 4. Impostazione dei problemi ai limiti (192). 5. Principio del valore massimo (198). 6. Teorema di unicità (201). 7. Teorema di unicità per la retta infinita (204).	
<b>§ 2. Metodo di separazione delle variabili . . . . .</b>	<b>205</b>
1. Problema ai limiti omogeneo (205). 2. Funzione della sorgente (209). 3. Problemi ai limiti con condizioni iniziali discontinue (211). 4. Equazione non omogenea della conduzione termica (219). 5. Primo problema ai limiti generale (222). Problemi (223).	

§ 3. Problemi sulla retta infinita . . . . .	225
1. Propagazione di calore lungo una retta infinita. Funzione della sorgente per un dominio illimitato (225). 2. Problemi ai limiti per una retta semilimitata (239).	
§ 4. Problemi senza condizioni iniziali . . . . .	247
Problemi al capitolo III . . . . .	250
Appendici al capitolo III . . . . .	252
I. Onde termiche . . . . .	252
II. Influenza del decadimento radioattivo sulla temperatura della crosta terrestre . . . . .	255
III. Metodo della similitudine nella teoria della conduzione termica . . . . .	261
1. Funzione di sorgente per la retta infinita (261). 2. Problemi ai limiti per l'equazione della conduzione termica quasi-lineare (263).	
V. Problema della transizione di fase . . . . .	265
V. Equazione di Einstein-Kolmogorov . . . . .	270
VI. La funzione delta . . . . .	273
1. Definizione di funzione $\delta$ (273). 2. Sviluppo della funzione $\delta$ in serie di Fourier (276). 3. Applicazione della funzione $\delta$ alla costruzione della funzione di sorgente (278).	

#### Capitolo IV. Equazioni di tipo ellittico

§ 1. Problemi che conducono all'equazione di Laplace . . . . .	282
1. Campo termico stazionario. Impostazione dei problemi ai limiti (282). 2. Corrente potenziale di un liquido. Potenziale di corrente stazionaria e di campo elettrostatico (283). 3. Equazione di Laplace in un sistema di coordinate curvilinee (285). 4. Alcune soluzioni particolari dell'equazione di Laplace (288). 5. Funzioni armoniche e funzioni analitiche di variabile complessa (289). 6. Trasformazione per raggi vettori reciproci (292).	
§ 2. Proprietà generali delle funzioni armoniche . . . . .	293
1. Formule di Green. Rappresentazione integrale della soluzione (293). 2. Alcune proprietà fondamentali delle funzioni armoniche (300). 3. Unicità e stabilità del primo problema ai limiti (303). 4. Problemi con condizioni al contorno discontinue (304). 5. Punti singolari isolati (306). 6. Regolarità di una funzione armonica di tre variabili all'infinito (308). 7. Problemi ai limiti esterni. Unicità della soluzione per problemi bi- e tridimensionali (309). 8. Secondo problema ai limiti. Teorema di unicità (312).	
§ 3. Risoluzione dei problemi ai limiti per domini elementari con il metodo di separazione delle variabili . . . . .	315
1. Primo problema ai limiti per un cerchio (315). 2. Integrale di Poisson (320). 3. Caso di valori al contorno discontinui (323).	

§ 4. Funzione di sorgente . . . . .	324
1. Funzione di sorgente per l'equazione $\Delta u = 0$ e sue proprietà fondamentali (324). 2. Metodo delle immagini elettrostatiche e della funzione di sorgente per la sfera (329). 3. Funzione di sorgente per il cerchio (332). 4. Funzione di sorgente per il semispazio (333).	
§ 5. Teoria del potenziale . . . . .	335
1. Potenziale volumetrico (335). 2. Problema piano. Potenziale logaritmico (337). 3. Integrali impropri (339). 4. Derivate prime del potenziale volumetrico (346). 5. Derivate seconde del potenziale volumetrico (349). 6. Potenziali superficiali (353). 7. Superficie e curve di Ljapunov (357). 8. Discontinuità del potenziale a strato doppio (359). 9. Proprietà del potenziale a strato semplice (363). 10. Applicazione dei potenziali superficiali alla soluzione dei problemi ai limiti (366). 11. Equazioni integrali corrispondenti ai problemi ai limiti (371).	
Problemi al capitolo IV . . . . .	375
Appendici al capitolo IV . . . . .	377
I. Espressione asintotica del potenziale volumetrico . . . . .	377
II. Problemi elettrostatici . . . . .	381
III. Problema fondamentale dell'esplorazione elettrica . . . . .	386
IV. Determinazione dei campi vettoriali . . . . .	392
V. Applicazione del metodo delle trasformazioni conformi in elettrostatica . . . . .	396
VI. Applicazione del metodo delle trasformazioni conformi in idrodinamica . . . . .	400
VII. Equazione biarmonica . . . . .	406
1. Unicità della soluzione (407). 2. Rappresentazione delle funzioni biarmoniche mediante funzioni armoniche (407). 3. Soluzione dell'equazione biarmonica per un cerchio (409).	
 Capitolo V. Propagazione delle onde nello spazio	
1. Problema con le condizioni iniziali . . . . .	411
1. Equazione delle vibrazioni nello spazio (411). 2. Metodo della media (413). 3. Formula di Poisson (414). 4. Metodo della « discesa » (416). 5. Interpretazione fisica (418). 6. Metodo della riflessione (420).	
2. Formula integrale . . . . .	422
1. Deduzione della formula integrale (422). 2. Conseguenze della formula integrale (425).	
§ 3. Vibrazioni di volumi limitati . . . . .	428
1. Schema generale del metodo di separazione delle variabili. Onde stazionarie (428). 2. Vibrazioni di una membrana rettangolare (434). 3. Vibrazioni di una membrana circolare (438).	

Problemi al capitolo V . . . . .	444
Appendici al capitolo V . . . . .	445
I. Riduzione delle equazioni della teoria dell'elasticità a equazioni delle vibrazioni . . . . .	445
II. Equazioni del campo elettromagnetico . . . . .	447
1. Equazioni del campo elettromagnetico e condizioni al contorno (447). 2. Potenziali del campo elettromagnetico (451). 3. Campo elettromagnetico di un oscillatore (453).	
<b>Capitolo VI. Propagazione di calore nello spazio</b>	
§ 1. Propagazione di calore nello spazio illimitato . . . . .	460
1. Funzione di influenza termica (460). 2. Propagazione di calore nello spazio illimitato (464).	
§ 2. Propagazione di calore in volumi limitati . . . . .	469
1. Schema del metodo di separazione delle variabili (469). 2. Raffreddamento di un cilindro circolare (472). 3. Calcolo delle dimensioni critiche (474).	
§ 3. Problemi ai limiti per domini a frontiere mobili . . . . .	476
1. Formula di Green per l'equazione della conduzione termica e funzione di sorgente (476). 2. Risoluzione di un problema ai limiti (480). 3. Funzione di sorgente per un segmento (482).	
§ 4. Potenziali termici . . . . .	485
1. Proprietà dei potenziali termici a strato semplice e doppio (485). 2. Risoluzione dei problemi ai limiti (487).	
Problemi al capitolo VI . . . . .	489
Appendici al capitolo VI . . . . .	490
I. Diffusione di una nube . . . . .	490
II. Smagnetizzazione di un cilindro con avvolgimento . . . . .	493
<b>Capitolo VII. Equazioni di tipo ellittico (seguito)</b>	
§ 1. Problemi fondamentali che conducono all'equazione $\Delta v + cv = 0$ . . . . .	499
1. Vibrazioni stabili (499). 2. Diffusione di un gas per decadimento o per reazione a catena (500). 3. Diffusione di un mezzo in moto (500). 4. Impostazione dei problemi ai limiti interni per l'equazione $\Delta v + cv = 0$ (501).	
§ 2. Funzione di influenza delle sorgenti puntuali . . . . .	503
1. Funzione di influenza delle sorgenti puntuali (503). 2. Rappresentazione integrale della soluzione (505). 3. Potenziali (508).	
§ 3. Problemi per i domini illimitati. Principio di radiazione . . . . .	511
1. Equazione $\Delta v + cv = -f$ nello spazio illimitato (511). 2. Principio di assorbimento limite (512). 3. Principio di ampiezza limite (514). 4. Condizioni di radiazione (515).	

<i>i. Problemi della teoria matematica della diffrazione . . . . .</i>	520
1. Impostazione del problema (520). 2. Unicità della soluzione del problema della diffrazione (521). 3. Diffrazione sulla sfera (524).	
<b>Problemi al capitolo VII . . . . .</b>	531
<b>Appendici al capitolo VII . . . . .</b>	533
<b>I. Onde in tubi cilindrici . . . . .</b>	533
<b>II. Vibrazioni elettromagnetiche in risonatori vuoti . . . . .</b>	543
1. Autovibrazioni di un endovibratore cilindrico (544). 2. Energia elettromagnetica delle autovibrazioni (548). 3. Eccitazione delle vibrazioni in un endovibratore (550).	
<b>III. Effetto skin . . . . .</b>	552
<b>IV. Propagazione delle onde radio sopra la superficie della terra . . . . .</b>	557
<b>Complemento I. Metodo alle differenze finite</b>	
<b>§ 1. Notioni fondamentali . . . . .</b>	562
1. Reti e funzioni reticolari (563). 2. Approssimazione degli operatori differenziali elementari (564). 3. Problema alle differenze (570). 4. Stabilità (571).	
<b>§ 2. Schemi di differenze per l'equazione della conduzione termica . . . . .</b>	575
1. Schemi per l'equazione a coefficienti costanti (575). 2. Errore di approssimazione (577). 3. Identità energetica (579). 4. Stabilità (582). 5. Convergenza e precisione (586). 6. Schemi di differenze per le equazioni a coefficienti variabili (587). 7. Metodo del bilancio. Schemi conservativi (588). 8. Schemi a due strati per l'equazione della conduzione termica a coefficienti variabili (592). 9. Schemi a tre strati (599). 10. Soluzione dei sistemi di equazioni alle differenze. Metodo di fattorizzazione (601). 11. Metodi alle differenze per la soluzione di equazioni quasi-lineari (603).	
<b>§ 3. Metodo alle differenze finite per la soluzione del problema di Dirichlet . . . . .</b>	607
1. Approssimazione dell'operatore di Laplace con il metodo alle differenze (607). 2. Principio del massimo (611). 3. Valutazione della soluzione di un'equazione non omogenea (613). 4. Convergenza della soluzione del problema di Dirichlet alle differenze (615). 5. Soluzione delle equazioni alle differenze con il metodo dell'iterazione semplice (616).	
<b>§ 4. Metodi alle differenze per la soluzione dei problemi a più variabili spaziali . . . . .</b>	649
1. Schemi pluridimensionali (619). 2. Schemi economici (621). 3. Metodi iterativi a direzione variabile per la soluzione del problema di Dirichlet alle differenze (631).	
<b>Complemento II. Funzioni speciali</b>	
1. Introduzione (636). 2. Equazione generale della teoria delle funzioni speciali (638). 3. Andamento delle soluzioni nell'intorno di $x = a$ se $k(a) = 0$ (639). 4. Impostazione dei problemi ai limiti (641).	

<b>Parte I. Funzioni cilindriche . . . . .</b>	<b>644</b>
<b>§ 1. Funzioni cilindriche . . . . .</b>	<b>644</b>
1. Serie di potenze (645). 2. Formule ricorrenti (649). 3. Funzioni di ordine semintero (650). 4. Ordine asintotico delle funzioni cilindriche (651).	
<b>§ 2. Problemi ai limiti per l'equazione di Bessel . . . . .</b>	<b>654</b>
<b>§ 3. Vari tipi di funzioni cilindriche . . . . .</b>	<b>657</b>
1. Funzioni di Hankel (657). 2. Funzioni di Hankel e di Neumann (659). 3. Funzioni di argomento immaginario (661). 4. La funzione $K_\alpha(x)$ (663).	
<b>§ 4. Rappresentazione delle funzioni cilindriche sotto forma di integrali di contorno . . . . .</b>	<b>667</b>
1. Integrali di contorno (667). 2. Funzioni di Hankel (669). 3. Alcune proprietà della funzione gamma (670). 4. Rappresentazione integrale della funzione di Bessel (672). 5. Rappresentazione integrale della funzione $K_\nu(x)$ (674). 6. Formule asintotiche per le funzioni cilindriche (675).	
<b>§ 5. Integrale di Fourier-Bessel e altri integrali contenenti le funzioni di Bessel . . . . .</b>	<b>678</b>
1. Integrale di Fourier-Bessel (678). 2. Alcuni integrali contenenti le funzioni di Bessel (679).	
<b>Parte II. Funzioni sferiche . . . . .</b>	<b>683</b>
<b>§ 1. Polinomi di Legendre . . . . .</b>	<b>683</b>
1. Funzione generatrice e polinomi di Legendre (683). 2. Formule ricorrenti (685). 3. Equazione di Legendre (686). 4. Ortogonalità dei polinomi di Legendre (686). 5. Norma dei polinomi di Legendre (688). 6. Zeri dei polinomi di Legendre (688). 7. Limitatezza dei polinomi di Legendre (689).	
<b>§ 2. Funzioni associate di Legendre . . . . .</b>	<b>690</b>
1. Funzioni associate (690). 2. Norma delle funzioni associate (690). 3. Chiusura del sistema di funzioni associate (691).	
<b>§ 3. Polinomi armonici e funzioni sferiche . . . . .</b>	<b>694</b>
1. Polinomi armonici (694). 2. Funzioni sferiche (695). 3. Ortogonalità del sistema di funzioni sferiche (698). 4. Completezza del sistema di funzioni sferiche (701). 5. Sviluppo in funzioni sferiche (702).	
<b>§ 4. Alcuni esempi di applicazione delle funzioni sferiche . . . . .</b>	<b>706</b>
1. Problema di Dirichlet per la sfera (706). 2. Sfera conduttrice nel campo di una carica puntuale (707). 3. Polarizzazione di una palla in un campo omogeneo (708). 4. Autovibrazioni di una sfera (710). 5. Problema ai limiti esterno per una sfera (713).	
<b>Parte III. Polinomi di Čebyshev-Hermite e di Čebyshev-Laguerre . . . . .</b>	<b>715</b>
<b>§ 1. Polinomi di Čebyshev-Hermite . . . . .</b>	<b>715</b>

1. Formula differenziale (715). 2. Formule ricorrenti (715).	
3. Equazione di Čebyšev-Hermite (716). 4. Norma dei polinomi	
$H_n(x)$ (717). 5. Funzioni di Čebyšev-Hermite (718).	
§ 2. Polinomi di Čebyšev-Laguerre . . . . .	718
1. Formula differenziale (718). 2. Formule ricorrenti (719).	
3. Equazione di Čebyšev-Laguerre (719). 4. Ortogonalità e norma	
dei polinomi di Čebyšev-Laguerre (720). 5. Polinomi generalizzati	
di Čebyšev-Laguerre (721.)	
§ 3. Problemi elementari per l'equazione di Schrödinger . . . . .	722
1. Equazione di Schrödinger (722). 2. Oscillatore armonico (724).	
3. Rotatore (725). 4. Moto dell'elettrone in un campo coulombiano (726).	
Parte IV. Formule, tabelle, grafici . . . . .	730
I. Proprietà fondamentali delle funzioni speciali . . . . .	731
II. Tabelle . . . . .	736
III. Grafici delle funzioni speciali . . . . .	740
IV. Vari sistemi di coordinate ortogonali . . . . .	742