

Boris A. Dubrovin Sergej P. Novikov
Anatolij T. Fomenko

Geometria e topologia delle varietà

Volume secondo

Editori Riuniti Edizioni Mir

Prefazione	10
I. Esempi di varietà	
§ 1. Nozione di varietà	11
1. Definizione di una varietà p. 11 — 2. Applicazioni di varietà; tensori su una varietà p. 15 — 3. Embeddings e immersioni di varietà. Varietà con bordo p. 18.	
§ 2. Esempi elementari di varietà	19
1. Superfici nello spazio euclideo. Gruppi di trasformazioni come varietà p. 19 — 2. Spazi proiettivi p. 24.	
§ 3. Nozioni utili della teoria dei gruppi di Lie	27
1. Struttura dell'intorno del punto unitario di un gruppo di Lie. Algebra di Lie del gruppo. Semisemplicità p. 27 — 2. Nozione di rappresentazione (lineare). Esempio di un gruppo di Lie non matriciale p. 33.	
§ 4. Varietà complesse	36
1. Definizioni e esempi p. 36 — 2. Superfici di Riemann come varietà p. 42.	
§ 5. Spazi omogenei elementari	45
1. Azione di un gruppo su una varietà p. 45 — 2. Esempi di spazi omogenei p. 46.	
§ 6. Spazi a curvatura costante (spazi simmetrici)	50
1. Nozione di spazio simmetrico p. 50 — 2. Gruppo di isometrie. Proprietà dell'algebra di Lie del gruppo p. 52 — 3. Spazi simmetrici del primo e del secondo tipo p. 54 — 4. I gruppi di Lie come spazi simmetrici p. 55 — 5. Costruzione degli spazi simmetrici. Esempi p. 57.	
§ 7. Varietà generate da elementi lineari	61
1. Varietà costruite sui vettori tangenti p. 61 — 2. Fibrato normale ad una sottovarietà p. 64.	

II. Nozioni preliminari.

Richiami di elementi della teoria delle funzioni. Applicazioni differenziabili tipiche

§ 8. Partizione dell'unità. Applicazioni	67
1. Partizione dell'unità p. 68 — 2. Qualche esempio di partizione dell'unità. Integrazione su una varietà e formula di Stokes p. 71 — 3. Metriche invarianti p. 76.	
§ 9. Realizzazione di varietà compatte sotto forma di superfici in $\mathbb{R}^N$	78
§ 10. Proprietà delle applicazioni differenziabili di varietà	79
1. Approssimazione delle applicazioni continue mediante applicazioni differenziabili p. 79 — 2. Teorema di Sard p. 81 — 3. Regolarità trasversale p. 85 — 4. Funzioni di Morse p. 88.	
§ 11. Applicazioni del teorema di Sard	92
1. Esistenza di embeddings e di immersioni p. 92 — 2. Funzioni di Morse come funzioni dell'altezza p. 94 — 3. Punti focali p. 97.	

III. Grado dell'applicazione.

Indice d'intersezione. Applicazioni di queste nozioni

§ 12. Nozione di omotopia	100
1. Definizione dell'omotopia. Approssimazione differenziabile delle applicazioni e delle omotopie p. 100 — 2. Omotopie relative p. 102.	
§ 13. Grado dell'applicazione	103
1. Definizione del grado p. 103 — 2. Generalizzazioni della definizione del grado p. 105 — 3. Classificazione omotopa delle applicazioni di una varietà in una sfera p. 106 — 4. Alcuni esempi elementari p. 107.	
§ 14. Alcune applicazioni del grado	110
1. Il grado e l'integrale p. 110 — 2. Grado del campo vettoriale su un'ipersuperficie p. 111 — 3. Numero di Whitney. Formula di Gauss-Bonnet p. 113 — 4. Indice di un punto singolare di un campo vettoriale p. 118 — 5. Superficie trasversale di un campo vettoriale. Teorema di Poincaré-Bendixson p. 121.	
§ 15. Indice d'intersezione e sue applicazioni	124
1. Definizione dell'indice d'intersezione p. 124 — 2. Singularità totale di un campo vettoriale p. 126 — 3. Numero algebrico dei punti fissi. Teorema di Brouwer p. 128 — 4. Coefficiente di allacciamento p. 130.	

IV. Varietà orientabili. Gruppo fondamentale. Rivestimenti (spazi fibrati e fibre discrete)

§ 16. Varietà orientabili e omotopia dei cammini chiusi	132
1. Trasporto dell'orientamento lungo un cammino p. 132 — 2. Esempi di varietà non orientabili p. 134.	
§ 17. Gruppo fondamentale	135
1. Definizione del gruppo fondamentale p. 135 — 2. Influenza del punto di base p. 136 — 3. Classi di omotopia libera di applicazioni di un cerchio p. 137 — 4. Equivalenza di omotopia p. 138 — 5. Esempi p. 139 — 6. Gruppo fondamentale e orientamento delle varietà p. 141.	
§ 18. Rivestimento e sollevamento delle omotopie	142
1. Definizione e proprietà fondamentali dei rivestimenti p. 142 — 2. Esempi elementari. Rivestimento universale p. 144 — 3. Rivestimenti ramificati. Superfici di Riemann p. 146 — 4. Rivestimenti e gruppi discreti p. 149.	
§ 19. Rivestimenti e gruppo fondamentale. Calcolo del gruppo fondamentale di alcune varietà	150
1. Monodromia p. 150 — 2. Calcolo del gruppo fondamentale mediante rivestimenti p. 152 — 3. Gruppo di omologia elementare p. 155.	
§ 20. Gruppi discreti degli spostamenti del piano di Lobačevskij	158

V. Gruppi di omotopia

§ 21. Definizione dei gruppi di omotopia assoluti e relativi. Esempi	172
1. Definizioni fondamentali p. 172 — 2. Gruppi di omotopia relativi. Successione esatta di una coppia p. 175.	
§ 22. Sollevamento delle omotopie. Gruppi di omotopia dei rivestimenti e degli spazi di lacci	178
1. Nozione di fibrazione p. 178 — 2. Successione esatta di una fibrazione p. 180 — 3. Dipendenza dei gruppi di omotopia dal punto di base p. 182 — 4. Caso dei gruppi di Lie p. 185 — 5. Moltiplicazione di Whitehead p. 188.	
§ 23. Alcune notazioni sui gruppi di omotopia delle sfere. Varietà dotate di un riferimento normale. Invariante di Hopf	190
1. Varietà dotate di un riferimento normale e gruppi di omotopia delle sfere p. 190 — 2. Sospensione p. 195 — 3. Calcolo dei gruppi $\pi_{n+1}(S^n)$ p. 197 — 4. Gruppi $\pi_{n+2}(S^n)$ p. 198.	

VI. Fibrati differenziabili (prodotti antisimmetrici)

- § 24. Teoria omotopa dei fibrati differenziabili 202
 1. Nozione di fibrato differenziabile p. 202 — 2. Connessione p. 206 — 3. Calcolo dei gruppi di omotopia mediante fibrati p. 208 — 4. Classificazione dei fibrati p. 215 — 5. Fibrati vettoriali e operazioni su di essi p. 219 — 6. Funzioni meromorfe p. 221 — 7. Formula di Picard-Lefschetz p. 225.
- § 25. Geometria differenziale dei fibrati differenziabili 228
 1. G -connessioni nei fibrati principali p. 228 — 2. Esempi di G -connessioni nei fibrati associati p. 233 — 3. Curvatura p. 236 — 4. Classi caratteristiche. Costruzioni p. 241 — 5. Classi caratteristiche. Classificazione p. 248.
- § 26. Nodi e allacciamenti. Trece 256
 1. Gruppo di un nodo p. 256 — 2. Polinomio di Alexander p. 258 — 3. Fibrato associato al nodo p. 259 — 4. Allacciamenti p. 261 — 5. Trece p. 263.

VII. Alcuni esempi di sistemi dinamici e di fogliettamenti sulle varietà

- § 27. Elementi di teoria qualitativa dei sistemi dinamici. Varietà bidimensionali 266
 1. Definizioni fondamentali p. 266 — 2. Sistemi dinamici su un toro p. 270.
- § 28. Sistemi hamiltoniani sulle varietà. Teorema di Liouville. Esempi 275
 1. Sistemi hamiltoniani sul fibrato cotangente p. 275 — 2. Sistemi hamiltoniani sulle varietà simplettiche p. 276 — 3. Flussi geodetici p. 279 — 4. Teorema di Liouville p. 281 — 5. Esempi p. 283.
- § 29. Fogliettamenti 287
 1. Definizioni fondamentali p. 287 — 2. Alcuni esempi di fogliettamenti di codimensione 1 p. 291.
- § 30. Problemi variazionali alle derivate di ordine superiore. Sistemi di campi hamiltoniani 296
 1. Formalismo hamiltoniano p. 296 — 2. Alcuni esempi p. 299 — 3. Formalismo hamiltoniano dei sistemi di campo p. 302.

VIII. Struttura globale delle soluzioni dei problemi variazionali a più dimensioni

§ 31.	Alcune varietà della relatività generale	312
	1. Posizione del problema p. 312 — 2. Soluzioni a simmetria sferica p. 313 — 3. Soluzioni a simmetria assiale p. 321 — 4. Modelli cosmologici p. 325 — 5. Modelli di Friedman p. 327 — 6. Modelli anisotropi nel vuoto p. 331 — 7. Modelli più generali p. 335.	
§ 32.	Alcuni esempi di soluzioni globali delle equazioni di Yang-Mills. Campi chirali	341
	1. Considerazioni generali. Soluzioni di monopolio p. 341 — 2. Equazione di dualità p. 345 — 3. Campi chirali. Integrale di Dirichlet p. 348.	
§ 33.	Minimo delle sottovarietà complesse	357
	Bibliografia	362
	Indice analitico	365