

Boris A. Dubrovin    Sergej P. Novikov  
Anatolij T. Fomenko

# Geometria delle superfici, dei gruppi di trasformazioni e dei campi

Volume primo

Editori Riuniti    Edizioni Mir.

# Indice

## Prefazione

11

## I. Geometria in un dominio dello spazio. Nozioni fondamentali

1. Sistemi di coordinate	17
1. Coordinate cartesiane nello spazio p. 17-2. Cambiamento di coordinate p. 19.	
2. Spazio euclideo	24
1. Curva nello spazio euclideo p. 24-2. Forme quadratiche e vettori p. 29.	
3. Spazi riemanniani e pseudoriemanniani	32
1. Metrica riemanniana p. 32-2. Metrica di Minkowski p. 35.	
4. Gruppi di trasformazioni elementari dello spazio euclideo	37
1. Gruppi delle trasformazioni di un dominio p. 37-2. Trasformazioni del piano p. 38-3. Spostamenti dello spazio euclideo a tre dimensioni p. 44-4. Altri gruppi di trasformazioni p. 48.	
5. Formule di Frenet	51
1. Curvatura delle curve piane p. 51-2. Curve sghembe. Curvatura e torsione p. 55-3. Trasformazioni ortogonali dipendenti da un parametro p. 59.	
6. Spazi pseudoeuclidei	62
1. Nozioni elementari della teoria della relatività ristretta p. 62-2. Trasformazioni di Lorentz p. 64.	

## II. Teoria delle superfici

§ 7. Geometria su una superficie nello spazio	71
1. Coordinate sulla superficie p. 71–2. Piano tangente p. 74–3. Metrica sulla superficie p. 76–4. Area della superficie p. 79.	
§ 8. Seconda forma fondamentale	84
1. Curvatura delle curve sulla superficie nello spazio euclideo p. 84–2. Invarianti di una coppia di forme quadratiche p. 85–3. Proprietà della seconda forma fondamentale p. 87.	
§ 9. Metrica della sfera	92
§ 10. Superfici spaziali nello spazio pseudoeuclideo	95
1. Pseudosfera p. 95–2. Curvatura delle superfici spaziali in $R^3_1$ p. 98.	
§ 11. Il linguaggio dei numeri complessi in geometria	99
1. Coordinate complesse e reali p. 99–2. Prodotto scalare hermitiano p. 101–3. Esempi di gruppi di trasformazioni complesse p. 102.	
§ 12. Funzioni analitiche	104
1. Notazione complessa dell'elemento di lunghezza e del differenziale di una funzione p. 104–2. Trasformazione complessa delle coordinate p. 106–3. Superfici nello spazio complesso p. 109.	
§ 13. Rappresentazione conforme delle metriche superficiali	111
1. Coordinate isoterme. Curvatura gaussiana in coordinate conformi p. 111–2. Rappresentazione conforme delle metriche della sfera e del piano di Lobachevskij p. 114–3. Superfici a curvatura costante p. 117.	
§ 14. Gruppi di trasformazioni come superfici nello spazio $N$ -dimensionale	118
1. Coordinate nell'intorno dell'unità p. 118–2. Esponenziale di una matrice p. 124–3. Quaternioni p. 126.	
§ 15. Trasformazioni conformi degli spazi euclidei e pseudoeuclidei multidimensionali	131

## III. Tensori. Teoria algebrica

§ 16. Esempi di tensori	138
-------------------------	-----

§ 17. Definizione generale di un tensore	144
1. Legge di trasformazione delle componenti dei tensori di rango qualunque p. 144-2. Operazioni algebriche sui tensori p. 150.	
§ 18. Tensori di tipo $(0, k)$	153
1. Notazione differenziale dei tensori a indici covarianti p. 153-2. Tensori antisimmetrici di tipo $(0, k)$ p. 155-3. Prodotto esterno di due forme differenziali. Algebra esterna p. 158-4. Tensori antisimmetrici di tipo $(k, 0)$ (polivettori). Integrale di variabili anticommutabili p. 159.	
§ 19. Tensori nello spazio riemanniano e pseudoriemanniano	161
1. Innalzamento e abbassamento degli indici p. 161-2. Autovalori di una forma quadratica p. 163-3. L'operatore di aggiunzione * p. 164-4. Tensori nello spazio euclideo p. 165.	
§ 20. Gruppi cristalografici e sottogruppi finiti del gruppo delle rotazioni del piano e dello spazio. Esempi di tensori invarianti	166
1. Tensori antisimmetrici. Invarianti del campo elettromagnetico p. 186-2. Tensori simmetrici e autovalori. Tensore energia-impulso del campo elettromagnetico p. 190.	
§ 21. Tensori di rango 2 nello spazio pseudoeuclideo e loro autovalori	186
1. Tensori antisimmetrici. Invarianti del campo elettromagnetico p. 186-2. Tensori simmetrici e autovalori. Tensore energia-impulso del campo elettromagnetico p. 190.	
§ 22. Effetto di un'applicazione sui tensori	193
1. Operazione generale di restrizione dei tensori a indici covarianti p. 193-2. Applicazione degli spazi tangenti p. 194.	
§ 23. Campi vettoriali	195
1. Gruppi dei diffeomorfismi a un parametro p. 195-2. Esponenziale di un campo di vettori p. 196-3. Derivata di Lie. Esempi p. 198.	
§ 24. Algebre di Lie	202
1. Algebre di Lie e campi vettoriali p. 202-2. Principali algebre matriciali di Lie p. 203-3. Campi vettoriali lineari p. 208-4. Campi invarianti a sinistra sui gruppi di trasformazioni p. 210-5. Metrica di Killing p. 212-6. Classificazione delle algebre di Lie tridimensionali p. 213-7. Algebra di Lie del gruppo conforme p. 214.	

## IV. Calcolo differenziale sui tensori

§ 25. Calcolo differenziale sui tensori antisimmetrici	220
1. Gradiente di un tensore antisimmetrico p. 220-2. Differenziale esterno di una forma p. 223.	
§ 26. Tensori antisimmetrici e teoria dell'integrazione	228
1. Integrazione delle forme differenziali p. 228-2. Esempi delle forme differenziali p. 233-3. Formula generale di Stokes. Esempi p. 238-4. Dimostrazione della formula generale di Stokes per il cubo p. 245.	
§ 27. Forme differenziali negli spazi complessi	248
1. Operatori $d'$ e $d''$ p. 248-2. Metrica kähleriana. Forma di curvatura p. 251.	
§ 28. Derivazione covariante	253
1. Connessione euclidea p. 253-2. Derivazione covariante dei tensori di rango qualunque p. 261.	
§ 29. Derivazione covariante e metrica	264
1. Trasporto parallelo dei campi vettoriali p. 264-2. Le geodetiche p. 267-3. Connessioni associate alla metrica p. 268-4. Connessioni associate alla struttura complessa p. 271.	
§ 30. Tensore di curvatura	275
1. Tensore di curvatura generale p. 257-2. Simmetrie del tensore di curvatura. Tensore di curvatura generato dalla metrica p. 278-3. Esempi: tensore di curvatura degli spazi bi- e tridimensionali, tensore di curvatura della metrica di Killing p. 280-4. Equazioni di Peterson-Codazzi. Superficie a curvatura costante negativa e equazione di «sine-Gordon» p. 285.	

## V. Elementi di calcolo delle variazioni

§ 31. Problemi alle variazioni unidimensionali	290
1. Equazioni di Eulero-Lagrange p. 290-2. Alcuni esempi di funzionali p. 293.	
§ 32. Leggi di conservazione	297
1. Gruppi di trasformazioni che conservano il problema delle variazioni p. 297-2. Alcuni esempi. Applicazione delle leggi di conservazione p. 298.	

§ 33. Formalismo hamiltoniano	307
1. Trasformazione di Legendre p. 307-2. Sistemi di riferimento mobili p. 310-3. Principi di Maupertuis e di Fermat. Applicazioni p. 313.	
§ 34. Teoria geometrica dello spazio delle fasi	315
1. Sistemi gradiente p. 315-2. Parentesi di Poisson p. 318-3. Trasformazioni canoniche p. 323.	
§ 35. Superfici di Lagrange	327
1. Fasci di traiettorie e equazione di Hamilton-Jacobi p. 327-2. Caso delle hamiltoniane che sono funzioni omogenee del primo ordine degli impulsi p. 331.	
§ 36. Variazione seconda per l'equazione delle geodetiche	334
1. Formula della variazione seconda p. 334-2. Punti coniugati e condizione di minimo p. 337.	
<b>VI. Problemi del calcolo delle variazioni in più dimensioni. Campi e loro invarianti geometrici</b>	
§ 37. Problemi elementari di calcolo delle variazioni in più dimensioni	340
1. Equazioni di Eulero-Lagrange p. 340-2. Tensore energia-impulso p. 343-3. Equazioni del campo elettromagnetico p. 347-4. Equazioni del campo gravitazionale p. 352-5. Superfici minimali (« pelli di sapone ») p. 359-6. Equazioni di equilibrio di una piastra sottile p. 364.	
§ 38. Alcuni esempi di lagrangiane	370
1. Elementi di relatività generale	373
1. Rappresentazione spinoriale dei gruppi $SO(3)$ e $O(3, 1)$ . Equazione di Dirac e sue proprietà	384
1. Automorfismi di un'algebra di matrici p. 386-2. Rappresentazione spinoriale del gruppo $SO(3)$ p. 388-3. Rappresentazione spinoriale del gruppo di Lorentz p. 389-4. Equazione di Dirac p. 392-3. Equazione di Dirac nel campo elettromagnetico. Operatore di conjugazione di carica p. 394.	

§ 41. Derivazione covariante dei campi a simmetria qualsiasi	395
1. Trasformazioni di gauge. Lagrangiane invarianti di gauge p. 395—2. Forma di curvatura p. 398—3. Alcuni esempi p. 399.	
§ 42. Esempi di funzionali invarianti di gauge. Equazioni di Maxwell e di Yang-Mills. Funzionali a derivata variazionale identicamente nulla (classi caratteristiche)	403
Bibliografia	409
Indice analitico	412