

*Renato Fiorenza     Donato Greco*

# **LEZIONI DI ANALISI MATEMATICA**

Volume primo

*Nuova Edizione*

Liguori Editore

# Indice

## Capitolo 1. Introduzione. Il campo reale. Il campo complesso.

1. Premesse .....	pag.	13
2. Richiami sui numeri razionali .....	»	18
3. Richiami sui numeri reali .....	»	23
4. Operazioni sui numeri reali .....	»	29
5. Il campo reale .....	»	33
6. Valore assoluto di un numero reale .....	»	37
7. Rappresentazione geometrica dei numeri reali .....	»	38
8. Intervalli numerici .....	»	39
9. Estremo superiore ed estremo inferiore di un insieme numerico. Insiemi separati, insiemi contigui .....	»	42
10. Completezza del campo reale .....	»	49
11. Rappresentazione geometrica di $\mathbb{R}^n$ .....	»	50
12. Coordinate polari nel piano .....	»	53
13. Il campo complesso .....	»	55
14. Forma algebrica dei numeri complessi .....	»	57
15. Rappresentazione geometrica dei numeri complessi .....	»	61
16. Forma trigonometrica dei numeri complessi .....	»	63
17. Radici $n^{\text{es}}$ dei numeri complessi .....	»	67
18. Radici primitive dell'unità .....	»	70
19. Elementi di analisi combinatoria .....	»	72
20. Potenza intera di una somma .....	»	79

## Capitolo 2. Le funzioni reali di una variabile reale.

1. Generalità sulle funzioni. Successioni .....	»	82
2. Diagramma di una funzione reale di una variabile reale .....	»	85
3. Definizioni relative alle funzioni reali .....	»	93
3.I. Restrizioni e prolungamenti di una funzione .....	»	93
3.II. Funzioni positive, negative. Zeri di una funzione. Valore assoluto .....	»	94
3.III. Funzioni pari, funzioni dispari. Funzioni periodiche .....	»	94
3.IV. Funzioni monotone .....	»	95
3.V. Funzioni composte .....	»	97
3.VI. Funzioni invertibili; equazioni. Corrispondenze biunivoche; insiemi numerabili .....	»	99
3.VII. Operazioni razionali sulle funzioni reali .....	»	105
3.VIII. Funzioni troncate .....	»	106
4. Estremi di una funzione reale .....	»	108
5. Le funzioni elementari nel campo reale .....	»	112
5.I. La funzione lineare. La funzione polinomio di primo grado .....	»	113

5.II. La funzione potenza di esponente intero non negativo .....	pag. 114
5.III. La funzione potenza di esponente intero negativo .....	> 115
5.IV. La funzione potenza di esponente reale .....	> 116
5.V. La funzione radice .....	> 118
5.VI. La funzione polinomio. Le funzioni razionali .....	> 120
5.VII. La funzione esponenziale .....	> 123
5.VIII. La funzione logaritmo .....	> 126
5.IX. Le funzioni circolari .....	> 128
5.X. Le inverse locali delle funzioni circolari .....	> 134
5.XI. Le funzioni iperboliche .....	> 140
5.XII. Le inverse delle funzioni iperboliche .....	> 145
6. Le funzioni $\log_a f$ ed $f^a$ .....	> 146
7. Equazioni e disequazioni .....	> 147
8. Equazioni e disequazioni trigonometriche .....	> 151
9. Esempi sulla ricerca dell'insieme di definizione di una espressione elementare .....	> 152

### Capitolo 3. **Limiti e continuità delle funzioni reali di una variabile reale. Successioni reali.**

1. Nozioni preliminari .....	> 155
2. Limite di una funzione reale di una variabile reale .....	> 159
2.I. Convergenza .....	> 160
2.II. Divergenza .....	> 162
2.III. Regolarità .....	> 163
2.IV. Interpretazione geometrica .....	> 163
3. Osservazioni sui limiti .....	> 165
4. Limite sinistro e limite destro .....	> 169
5. Teoremi sui limiti .....	> 170
5.I. Teoremi di confronto .....	> 170
5.II. Un criterio di regolarità per confronto .....	> 172
5.III. Limiti delle funzioni monotone .....	> 173
5.IV. Limiti delle funzioni inverse .....	> 174
5.V. Limiti delle funzioni composte .....	> 177
6. Limiti della somma, del prodotto, del rapporto. Forme indeterminate .....	> 179
7. Le funzioni continue .....	> 185
8. Teoremi sulle funzioni continue .....	> 187
9. Punti di discontinuità. Funzioni generalmente continue .....	> 189
9.I. Discontinuità eliminabili .....	> 189
9.II. Discontinuità di prima specie .....	> 190
9.III. Discontinuità di seconda specie .....	> 191
9.IV. Funzioni generalmente continue .....	> 192
10. Le funzioni continue in un intervallo. Criterio di continuità per le funzioni monotone .....	> 192
11. Continuità e limiti delle funzioni elementari .....	> 196
11.I. Potenza di esponente reale positivo .....	> 196
11.II. Potenza di esponente reale negativo .....	> 197
11.III. Radice di indice $n$ .....	> 197
11.IV. Polinomi e funzioni razionali .....	> 198
11.V. Funzione esponenziale e funzione logaritmo. Funzioni iperboliche e loro inverse .....	> 199
11.VI. Funzioni circolari e loro inverse locali .....	> 200

12. Le forme indeterminate $0^0$ , $1^\infty$ , $\infty^0$ , Osservazioni sulle varie forme indeterminate .....	pag. 200
13. Successioni reali .....	* 203
13.I. Generalità .....	* 203
13.II. Definizione di limite .....	* 204
13.III. Teorema sulle successioni estratte .....	* 207
13.IV. Funzioni composte mediante successioni .....	* 208
13.V. Teoremi sui limiti delle successioni .....	* 210
13.VI. Il numero $e$ .....	* 211
14. Limiti fondamentali .....	* 216
15. Esempi sulla ricerca del limite di una funzione .....	* 221
16. Infinitesimi ed infiniti .....	* 226
16.I. Confronto tra infinitesimi [infiniti]. I simboli di Landau .....	* 226
16.II. Il principio di sostituzione .....	* 231
16.III. Ordine di un infinitesimo [infinito] .....	* 232
16.IV. Parte principale di un infinitesimo [infinito]. Infinitesimi o infiniti equivalenti .....	* 233
17. Le funzioni continue in un insieme compatto .....	* 239
18. La continuità uniforme .....	* 241

#### Capitolo 4. Complementi sui limiti

1. Massimo e minimo limite .....	* 246
2. Il criterio di convergenza di Cauchy .....	* 252
3. Il metodo delle approssimazioni successive per l'equazione $f(x) = x$ . Contrazioni di un insieme nu- merico .....	* 253
4. I teoremi di Cesàro .....	* 256
4.I. Il teorema sulle medie aritmetiche .....	* 257
4.II. Il teorema sulle medie geometriche .....	* 259
4.III. Ulteriori teoremi .....	* 261

#### Capitolo 5. Derivate delle funzioni reali di una variabile reale.

1. Definizione di derivata .....	* 264
2. Interpretazione geometrica della derivata .....	* 268
3. Differenziale .....	* 272
4. Regole di derivazione .....	* 275
4.I. Derivate della somma, del prodotto, del rapporto .....	* 275
4.II. Derivata del determinante .....	* 277
4.III. Derivata di una funzione composta .....	* 278
4.IV. Derivata della funzione inversa .....	* 279
5. Derivate del valore assoluto, delle funzioni pari [dispari], delle funzioni periodiche .....	* 280
6. Derivate delle funzioni elementari .....	* 281
6.I. Derivata della funzione potenza .....	* 281
6.II. Derivata della funzione radice .....	* 282
6.III. Derivata di una funzione razionale .....	* 284
6.IV. Derivata della funzione esponenziale .....	* 284
6.V. Derivata della funzione logaritmo .....	* 284
6.VI. Derivate delle funzioni circolari e delle loro inverse locali .....	* 285
6.VII. Derivate delle funzioni iperboliche e delle loro inverse .....	* 287
7. Derivate delle funzioni composte mediante funzioni elementari .....	* 288

8. Derivate e differenziali di ordine superiore .....	pag.	290
9. Regole di differenziazione .....	*	293

## Capitolo 6. Applicazioni del calcolo differenziale.

1. Funzioni crescenti o decrescenti in un punto. Funzioni monotone in un intervallo .....	>	296
2. Massimi e minimi relativi. Estremi assoluti .....	>	300
3. Concavità, convessità, flessi dei diagrammi. Funzioni convesse [concave] .....	>	306
4. I teoremi di Rolle, di Lagrange, di Cauchy .....	>	311
5. Conseguenze del teorema di Lagrange .....	>	314
5.I. Funzioni con derivata nulla .....	>	314
5.II. Caratterizzazione delle funzioni derivabili monotone in un intervallo .....	>	315
5.III. Caratterizzazione delle funzioni convesse derivabili .....	>	316
6. Conseguenze del teorema di Cauchy: i teoremi di L'Hospital .....	>	317
7. Discontinuità della derivata, Funzioni generalmente derivabili .....	>	323
8. Asintoti dei diagrammi .....	>	326
9. La formula di Taylor .....	>	330
9.I. La formula di Taylor per i polinomi .....	>	330
9.II. La formula di Taylor per le funzioni reali .....	>	331
10. Contatti fra diagrammi .....	>	338
11. Cenni sulla risoluzione numerica delle equazioni ..	>	339
11.I. Metodo di Newton-Fourier, o delle tangenti ..	>	340
11.II. Metodo delle parti proporzionali, o delle secanti .....	>	342
11.III. Metodo delle contrazioni .....	>	343
12. Complementi allo studio dei diagrammi delle funzioni elementari .....	>	344
13. Studio del diagramma di una funzione .....	>	346

## Capitolo 7. Polinomi ed equazioni algebriche. Funzioni razionali.

1. Generalità sui polinomi .....	>	358
2. Il principio di identità dei polinomi .....	>	359
3. Divisione dei polinomi .....	>	360
4. Derivate di un polinomio nel campo complesso ....	>	363
5. Equazioni algebriche .....	>	364
6. Radici multiple delle equazioni algebriche .....	>	366
7. Equazioni algebriche a coefficienti reali .....	>	368
8. Relazioni tra coefficienti e radici di un'equazione algebraica .....	>	370
9. L'equazione di terzo grado .....	>	371
10. Polinomio interpolatore di Lagrange. Cenni sull'interpolazione polinomiale .....	>	374
11. Funzioni razionali .....	>	379
11.I. Decomposizione di una funzione razionale in fratti semplici .....	>	380
11.II. Osservazioni sul calcolo dei coefficienti delle formule di decomposizione in fratti semplici ..	>	384
11.III. La formula di Hermite .....	>	387

## Capitolo 8. Integrazione delle funzioni di una variabile.

1. Funzioni primitive .....	pag.	390
2. Nozioni sugli insiemi di punti del piano .....	*	392
3. La teoria elementare della misura per gli insiemi piani .....	*	394
4. Area del rettangoloide .....	*	398
4.I. Caso delle funzioni continue in un intervallo compatto .....	*	398
4.II. Caso delle funzioni continue in un intervallo non compatto .....	*	401
4.III. Caso delle funzioni generalmente continue ...	*	403
5. Integrale di una funzione continua in un intervallo compatto .....	*	404
6. Integrale definito di una funzione continua .....	*	408
7. Proprietà dell'integrale definito .....	*	409
8. Il primo teorema della media .....	*	412
9. Il teorema fondamentale del calcolo integrale .....	*	414
10. Il secondo teorema della media .....	*	416
11. Integrali delle funzioni generalmente continue .....	*	419
11.I. Integrale di una funzione continua in un intervallo non compatto .....	*	419
11.II. Integrale di una funzione generalmente continua in un intervallo con un numero finito di punti di discontinuità .....	*	424
11.III. Primitive delle funzioni generalmente continue .....	*	427
11.IV. Integrale di una funzione generalmente continua con infiniti punti di discontinuità ..	*	429
12. Criteri di integrabilità .....	*	430
12.I. Criteri di sommabilità .....	*	430
12.II. Un criterio di semplice integrabilità .....	*	436
13. Cenni sul calcolo numerico degli integrali definiti ..	*	438
13.I. La formula di Bézout, o dei trapezi .....	*	439
13.II. La formula di Côtes, o delle tangenti .....	*	441
13.III. La formula di Cavalieri-Simpson o delle parabole .....	*	443

## Capitolo 9. Integrazione indefinita elementare. Calcolo degli integrali definiti.

1. Integrale indefinito. Integrali indefiniti fondamentali .....	*	445
2. Metodi di integrazione indefinita .....	*	449
2.I. Integrazione per decomposizione in somma ...	*	450
2.II. Integrazione per parti .....	*	451
2.III. Integrazione per sostituzione .....	*	453
3. Alcuni artifici ed esempi .....	*	454
4. Integrali delle funzioni elementari .....	*	456
5. Formule di ricorrenza .....	*	457
6. L'integrale della funzione $1/(1+x^2)^n$ .....	*	459
7. Integrali di alcune espressioni trigonometriche .....	*	460
8. Integrali delle funzioni $x^m \cos qx$ , $x^m \sin qx$ .....	*	466
9. Integrali delle funzioni razionali .....	*	468
9.I. Integrazione per decomposizione in fratti semplici .....	*	468

9.II. Integrazione mediante la formula di Hermite ..	pag.	472
10. Sostituzioni razionalizzanti .....	>	474
10.I. Integrale di un'espressione razionale di $e^x$ .....	>	476
10.II. Integrale di un'espressione razionale di $\sin x$ e $\cos x$ .....	>	476
10.III. Integrale di un'espressione razionale di $x$ e $\sqrt{(ax+b)/(cx+d)}$ .....	>	480
10.IV. Integrale di un'espressione razionale di $x$ e $\sqrt{ax^2+bx+c}$ .....	>	481
10.V. Integrale di un'espressione razionale di $x$ , $\sqrt{ax+b}$ , $\sqrt{cx+d}$ .....	>	484
10.VI. Integrali dei differenziali binomi .....	>	485
11. Ulteriori considerazioni sull'integrazione per sostituzione .....	>	488
12. Calcolo degli integrali definiti .....	>	489
12.I. Integrazione definita per decomposizione in somma .....	>	490
12.II. Integrazione definita per parti .....	>	490
12.III. Integrazione definita per sostituzione .....	>	491
12.IV. Osservazioni sull'integrale definito di una funzione pari [dispari] e di una funzione periodica .....	>	493
13. La formula di Taylor col termine complementare sotto forma di integrale. Primitive di ordine $n$ di una funzione continua .....	>	505

## Capitolo 10. Funzioni complesse di una variabile reale.

1. Generalità .....	>	508
2. Derivazione e integrazione delle funzioni complesse di una variabile reale .....	>	513
3. La funzione $e^{ix}$ e le formule di Eulero .....	>	516
4. La forma esponenziale dei numeri complessi .....	>	520
5. Applicazione al calcolo degli integrali delle funzioni $x^n e^{ix} \cos qx$ , $x^n e^{ix} \sin qx$ .....	>	521

<i>Indice analitico</i> .....	>	523
-------------------------------	---	-----