

Giuseppe De Marco

ANALISI UNO

primo corso

di analisi matematica

— teoria ed esercizi —

SECONDA EDIZIONE



DECIBEL



ZANICHELLI

Indice

Prefazione	1
Alfabeto greco	4
Lista di simboli	4
Capitolo 0. ANALISI ZERO	
0.0. Il linguaggio degli insiemi	5
0.1. I vari tipi di numeri	7
0.2. Geometria e numeri reali	18
0.3. Funzioni (o applicazioni). Grafici di alcune funzioni importanti	28
Esercizi alle sezioni 0,1,2,3	62
0.4. Descrizione assiomatica di $\mathbb{R}$. Assioma di completezza	71
Esercizi alla sezione 4	82
0.5. Funzioni circolari. Funzioni periodiche	85
0.6. Logica	95
0.7. Teoria degli insiemi	97
0.8. Alcuni complementi di teoria degli insiemi	98
0.9. Inverse sinistre e destre di funzioni	100
0.10. Terne ordinate, n -ple ordinate, insieme prodotto di una famiglia di insiemi	102
Capitolo 1. NUMERI COMPLESSI	
1.1. Introduzione	105
1.2. Numeri complessi	106
1.3. Reali e immaginari puri	108
1.4. Parte reale, coefficiente dell'immaginario; piano di Argand-Gauss	108
1.5. Coniugato	110
1.6. Modulo	111
1.7. Forma polare	113

1.8. Interpretazione geometrica della moltiplicazione	115
1.9. Notazione esponenziale	116
1.10. Potenze e radici	117
1.11. Radici quadrate dei numeri complessi	121
1.12. Equazioni algebriche nel campo complesso	123
1.13. Distanza nei complessi e geometria piana	128

Capitolo 2. GRUPPI, ANELLI, CORPI

2.1. Operazioni binarie	131
2.2. Associatività, commutatività, elementi neutri, semigrupp	131
2.3. Simmetrico	133
2.4. Gruppi	134
2.5. Sottogruppi di un gruppo	135
2.6. Omomorfismi, isomorfismi	136
2.7. Anelli e corpi	139
2.8. Sottoanelli e sottocorpi. Omomorfismi ed isomorfismi di anelli e di corpi	141
2.9. Automorfismi di $\mathbb{Q}$ e di $\mathbb{R}$	143
2.10. Funzioni polinomiali	143
2.11. Il principio di identità dei polinomi	145
2.12. Relazioni binarie su un insieme	146
2.13. Relazioni di equivalenza	147
2.14. Relazioni d'ordine	150

Capitolo 3. IL PRINCIPIO DI INDUZIONE

3.1. Introduzione	153
3.2. Applicazioni	154
3.3. Applicazione alle permutazioni	155
3.4. La media aritmetica è maggiore della media geometrica	156
3.5. La successione $n \mapsto (1 + x/n)^n$	158
3.6. Principio di induzione: seconda forma	160

Capitolo 4. NUMERO DI ELEMENTI DI UN INSIEME

4.1. Introduzione	163
4.2. Ordine naturale dei cardinali	164
4.3. Insiemi finiti	166
4.4. Addizione di cardinali	168
4.5. Moltiplicazione di cardinali	172
4.6. Esponenziazione di cardinali	174
4.7. Il simbolo di sommatoria	175
4.8. Prodotti	180
4.9. Formula di Abel	181

Capitolo 5. ALCUNE FORMULE DI COMBINATORIA

5.1. Disposizioni e combinazioni	183
5.2. La formula del binomio	186

5.3. Applicazione del teorema del binomio	188
5.4. Altre formule di combinatoria	190
5.5. Altre formule algebriche di tipo combinatorio	191

Capitolo 6. LA TOPOLOGIA DELLA RETTA REALE

6.1. Introduzione	193
6.2. Aperti della retta reale	193
6.3. Intervalli centrati	194
6.4.	195
6.5.	195
6.6. Intorni di un punto in $\mathbb{R}$	196
6.7. Topologia della retta estesa	197

Capitolo 7. LIMITE DI UNA SUCCESSIONE DI NUMERI REALI

7.1. Nozione di limite per una successione reale	199
7.2. Unicità del limite	201
7.3. Sottosuccessioni di una successione	202
7.4. Teorema della permanenza del segno	203
7.5. Teorema del confronto	203
7.6. Successioni limitate	204
7.7. Teorema dei carabinieri	204
7.8. Infinitesimi	205
7.9. Operazioni con i limiti finiti	205
7.10. Operazioni con i limiti infiniti: somma	207
7.11. Operazioni con limiti infiniti: prodotto	207
7.12. Operazioni con i limiti infiniti: reciproco e quoziente	208
7.13. Forme indeterminate	209
7.14. Successioni monotone	209
7.15. La successione aritmetica e la successione geometrica	210
7.16. L'esponenziale naturale	211
7.17. Digressione importante: le funzioni elementari	214
7.18. Sottosuccessioni monotone	217

Capitolo 8. LA TOPOLOGIA DEL PIANO

8.1. Introduzione	219
8.2. Aperti del piano	219
8.3. Aperti e distanza euclidea	220
8.4. Limite di una successione complessa	221
8.5. Successioni complesse e successioni reali	222
8.6. Operazioni con i limiti complessi	222
8.7. Infinitesimi ed infiniti complessi; operazioni con limiti infiniti	223
8.8. La successione geometrica	224
8.9. Sottosuccessioni convergenti in $\mathbb{C}$	224

Capitolo 9. SERIE NUMERICHE

9.1. Introduzione	227
9.2. Definizioni	228
9.3. Il termine generale di una serie convergente	232
9.4. Condizioni per la convergenza	233
9.5. Convergenza assoluta	234
9.6. Serie a termini complessi	235
9.7. Convergenza assoluta di serie complesse	237
9.8. Criteri del rapporto e della radice	237
9.9. Il criterio di condensazione di Cauchy	241
9.10. Successioni a variazione finita	242
9.11. Serie a termini di segno alterno	243
9.12. Esponenziale complesso	245
9.13. Proprietà di omomorfismo dell'esponenziale complesso	247
9.14. Coseno e seno	248
9.15. Proprietà commutativa per le serie numeriche	250
9.16. Proprietà associativa/dissociativa per le serie	253
9.17. Sviluppi in base b	254
9.18. Il criterio di Raabe	257

Capitolo 10. ALTRE NOZIONI DI TOPOLOGIA

10.1. Chiusura	259
10.2. Punti di accumulazione e punti isolati	260
10.3. Successioni e punti di accumulazione	261
10.4. Successioni e chiusura	261
10.5. Compatti per successioni	262
10.6. Compattezza	263
10.7. Chiusura e punti di accumulazione in $\mathbb{R}^2$	264
10.8. Complementi ed esercizi	264
10.9. Interno di un insieme	265
10.10. Frontiera	266

Capitolo 11. LA NOZIONE DI LIMITE PER LE FUNZIONI REALI
DI UNA VARIABILE REALE

11.1. Limiti delle funzioni reali di una variabile reale	267
11.2. Casi particolari	269
11.3. Funzioni convergenti e divergenti	271
11.4. Limiti delle restrizioni; limiti destri e sinistri	272
11.5. Limiti delle funzioni monotone	273
11.6. Teoremi sui limiti	274
11.7. Forme indeterminate	275
11.8. Limiti notevoli	279

Capitolo 12. LA CONTINUITÀ PER LE FUNZIONI REALI DI UNA VARIABILE

12.1. Definizione di continuità	281
12.2. Operazioni con funzioni continue	283
12.3. Limiti e continuità delle funzioni composte	283
12.4. Continuità delle restrizioni e delle estensioni	285
12.5. Continuità in tutto il dominio	285
12.6. Prolungamento per continuità	287
12.7. Topologia indotta	289
12.8. Immagini continue di intervalli sono intervalli	291
12.9. Continuità delle funzioni monotone	292
12.10. Omeomorfismi	293
12.11. Applicazione alle funzioni trigonometriche; π	296
12.12. Inverse locali di coseno e seno	297
12.13. Argomento principale	298
12.14. Funzioni iperboliche	299
12.15. Punti di discontinuità	301
12.16. Estremanti assoluti	302
12.17. Estremanti locali	303
12.18. Funzioni continue su compatti	305

Capitolo 13. CONFRONTO LOCALE TRA FUNZIONI

13.1. Relazioni di confronto forte	309
13.2. Asintoticità	311
13.3. Criterio di asintoticità per la convergenza assoluta di una serie	312
13.4. Sviluppi asintotici delle funzioni elementari	314
13.5. Composizione di funzioni e confronto forte	316
13.6. Scale di confronto, parti principali, sviluppi asintotici	317
13.7. Relazioni di confronto debole: O grande	320
13.8.	321

Capitolo 14. DERIVATE

14.1. Variazione di una funzione relativamente alla variabile indipendente	323
14.2. Derivata di una funzione reale di una variabile reale	324
14.3. Derivate destre e sinistre	325
14.4. La derivabilità implica la continuità	326
14.5. Funzione derivata; derivate delle funzioni elementari	326
14.6. Linearità della derivazione	329
14.7. Derivazione dei prodotti	330
14.8. Derivazione del reciproco e del quoziente	331
14.9. Derivazione delle composizioni: regola della catena	332
14.10. Derivata del modulo di una funzione	333
14.11. Derivazione delle funzioni inverse	334

14.12. Diffeomorfismi	335
14.13. Derivata di arco coseno, arco seno ed arco tangente	335
14.14. Una funzione continua mai derivabile	337

Capitolo 15. INTEGRALE SECONDO RIEMANN

15.1. Funzioni a scalino	339
15.2. Integrale delle funzioni a scalino a supporto compatto	340
15.3. Area di un insieme piano	343
15.4. Funzioni Riemann integrabili	346
15.5. Proprietà dell'integrale	351
15.6. Integrale ed area del trapezoide	353
15.7. Un'osservazione spesso utile	354
15.8. Integrale esteso ad un intervallo	356
15.9. Integrabilità locale delle funzioni continue	357
15.10. Integrale esteso ad un intervallo orientato	359
15.11. Integrale indefinito	360
15.12. Primitive, o antiderivate; teorema fondamentale del calcolo	362
15.13. Integrali indefiniti	363
15.14. Integrazione delle funzioni razionali; primi cenni	365
15.15. Integrazione per parti	367
15.16. Integrazione per sostituzione	372
15.17. Integrazione definita per parti e per sostituzione	377
15.18. Il logaritmo come quadratura dell'iperbole	378
15.19. La serie logaritmica	379
15.20. Media di una funzione integrabile	380
15.21. Una generalizzazione del teorema della media	382

Capitolo 16. TEOREMI CLASSICI DEL CALCOLO DIFFERENZIALE

16.1. Derivate ed estremi locali	383
16.2. Teorema di Rolle, versione classica	384
16.3. Teorema del valor medio	385
16.4. Corollari del teorema del valor medio	385
16.5. Il teorema degli incrementi finiti	390
16.6. La regola di de l'Hôpital	391
16.7. Corollari	393
16.8. Derivate successive	394
16.9. Altre considerazioni	396
16.10. Punti di estremo locale interno e derivate successive	399
16.11. Funzioni convesse e concave	400
16.12. Asintoti	404
16.13. Sviluppi asintotici e derivate successive; la formula di Taylor con il resto nella forma di Peano	408
16.14. Applicazioni	410

Capitolo 17. DERIVATE ED INTEGRALI DI FUNZIONI A VALORI COMPLESSI

17.1. Funzioni complesse di una variabile reale	413
17.2. Funzioni complesse di variabile complessa	417
17.3. Funzioni razionali	419
17.4. Integrazione delle funzioni razionali	425
17.5. Alcune sostituzioni importanti	427
17.6. Integrazione delle funzioni complesse di variabile reale	434
17.7. Funzioni non elementarmente integrabili	438
17.8. Primitive di ordine superiore al primo	438
17.9. Serie di Taylor	441
17.10. La serie binomiale	443
17.11. Formula di Taylor con il resto nella forma di Lagrange	444
17.12. Un'osservazione sull'isotonia di un integrale	445
17.13. Ancora sull'integrazione per parti e per sostituzione	446
17.14. Esercizi di integrazione	449
17.15. L'integrale come limite delle somme di Riemann	456
17.16. Ancora sulle funzioni convesse	459

Capitolo 18. INTEGRALI GENERALIZZATI

18.1. Definizione e primi risultati	463
18.2. Criteri di convergenza	472
18.3. Altre considerazioni	474
18.4. Integrali generalizzati e serie	477
18.5. Criterio di Abel-Dirichlet	480
18.6. Esercizi ricapitolativi	485
18.7. Il teorema della convergenza monotona	499
18.8. Il logaritmo complesso	503

Capitolo 19. COMPLEMENTI DI VARIO GENERE

19.1. Diametro di un sottoinsieme di $\mathbb{C}$	507
19.2. Successioni di Cauchy	508
19.3. Criterio di convergenza di Cauchy: caso delle successioni	509
19.4. Criterio di convergenza di Cauchy per le serie numeriche	510
19.5. Criterio di convergenza di Cauchy per le funzioni	511
19.6. La funzione di oscillazione e la continuità	512
19.7. Continuità uniforme	513
19.8. Estendibilità delle funzioni uniformemente continue	515
19.9. Continuità uniforme sui compatti	515
19.10. Massimo e minimo limite	516
19.11. Complementi sulle successioni: i teoremi di Cesàro	519
19.12. Alcuni complementi sulle successioni	522
19.13. Alcune equazioni funzionali	523

Capitolo 20. ALCUNE EQUAZIONI DIFFERENZIALI	
20.1. Introduzione	527
20.2. Equazione lineare omogenea del primo ordine	528
20.3. Equazione lineare non omogenea del primo ordine	530
20.4. Operatori differenziali	532
20.5. Equazioni lineari del secondo ordine	532
20.6. Esempi ed esercizi	537
20.7. Tecniche risolutive per alcune equazioni non omogenee	541
20.8. Appendice sulle funzioni sinusoidali	553
20.9. Equazioni differenziali a variabili separabili	556
Appendice A. ALTRE VERSIONI DELL'ASSIOMA DELLA SCELTA: IL LEMMA DI ZORN	559
A.1. Prime conseguenze dell'assioma della scelta	562
Appendice B. COMPLETEZZA E NUMERI REALI	565
B.1. Introduzione	565
B.2. Completamento di insiemi ordinati η_0	567
Appendice C. ORDINALI, CARDINALI, NUMERI NATURALI	577
C.1. Insiemi bene ordinati	577
C.2. Numeri naturali	578
Appendice D. ASSIOMI DELLA TEORIA DEGLI INSIEMI	583
Formulario di Analisi Uno	587
Indice analitico	591