

*Renato Fiorenza    Donato Greco*

# **LEZIONI DI ANALISI MATEMATICA**

Volume secondo

*Terza Edizione*

Liguori Editore

**Capitolo 1. Equazioni differenziali lineari.**

1. Cenni sugli spazi vettoriali	pag. 15
2. Lo spazio vettoriale $C^\infty$ . Operatori differenziali lineari	» 18
3. Introduzione alle equazioni differenziali	» 20
4. Equazioni differenziali lineari	» 23
4.I. Il problema di Cauchy. Teorema di esistenza e unicità	» 24
4.II. Integrale generale	» 27
5. Equazioni lineari omogenee	» 28
5.I. Il wronskiano di $n$ integrali	» 28
5.II. Espressione dell'integrale generale	» 30
5.III. Integrali complessi	» 33
6. L'equazione lineare completa	» 34
7. Integrazione delle equazioni lineari	» 36
7.I. L'equazione lineare del primo ordine	» 36
7.II. Equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti	» 44
7.III. Equazioni lineari complete a coefficienti costanti	» 51
7.IV. L'equazione di Eulero	» 59
8. Equazioni col primo coefficiente diverso da 1	» 61
9. Cenni sui problemi ai limiti per le equazioni lineari	» 62
9.I. Un problema ai limiti per l'equazione lineare del secondo ordine	» 64
9.II. Un problema di Sturm-Liouville. Autovalori ed autosoluzioni	» 69

**Capitolo 2. Le serie numeriche. Cenni sui prodotti infiniti.**

1. Generalità	» 75
2. La serie geometrica	» 80
3. Serie resto e resti parziali. Il criterio di Cauchy per le serie	» 82
4. Proprietà delle serie	» 83
5. Serie a termini non negativi (non positivi). La serie armonica	» 87
6. Le serie alternanti	» 90
7. Convergenza assoluta e convergenza incondizionata	» 94
8. Criteri di convergenza assoluta	» 98
8.I. Il criterio del rapporto	» 99
8.II. Il criterio della radice	» 102
8.III. Connessione tra serie e integrali. Il criterio dell'integrale. Il criterio dell'ordine di infinitesimo	» 104
8.IV. Il criterio di Raabe	» 109
9. Operazioni sulle serie	» 111
10. La numerabile additività dell'integrale. Un criterio di semplice integrabilità	» 115

11. Cenni sui prodotti infiniti	pag. 118
11.I. Criteri di convergenza	» 121
11.II. Convergenza assoluta e convergenza in condizionata	» 123

### Capitolo 3. **Successioni e serie di funzioni di una variabile reale.**

1. Successioni di funzioni. Convergenza puntuale. Convergenza uniforme	» 126
2. Teoremi sulle successioni uniformemente convergenti	» 135
2.I. Teoremi sull'inversione dei limiti e sulla continuità del limite	» 135
2.II. Teorema sulla derivazione del limite	» 137
2.III. Passaggio al limite sotto il segno di integrale	» 139
3. Serie di funzioni	» 144
4. Serie di potenze nel campo reale	» 150
5. Proprietà della somma di una serie di potenze	» 158
6. Serie di Taylor	» 160
7. Funzioni sviluppabili in serie di Taylor	» 162
8. Sviluppo in serie di Taylor di alcune funzioni elementari	» 165
8.I. Sviluppi di $\sin x$ e di $\cos x$	» 165
8.II. Serie esponenziale. Sviluppi di $\sinh x$ e di $\cosh x$	» 165
8.III. Serie logaritmica. Sviluppi di $\operatorname{tg} x$ e di $\operatorname{arctg} x$	» 166
8.IV. Serie binomiale	» 169
8.V. Sviluppo di $\operatorname{arcsin} x$	» 174
8.VI. Considerazioni geometriche	» 174
8.VII. Applicazioni	» 176
9. Cenni sugli integrali ellittici	» 179
10. Cenni sulle serie di Fourier	» 181
10.I. Serie trigonometriche	» 181
10.II. Serie di Fourier di una funzione	» 184
10.III. Funzioni sviluppabili in serie di Fourier	» 185
10.IV. Sviluppi in serie di seni, o di coseni	» 187
10.V. Derivazione ed integrazione termine a termine delle serie di Fourier	» 188
10.VI. Serie di Fourier con periodo qualsiasi	» 190
10.VII. Esempi	» 191

### Capitolo 4. **Lo spazio euclideo reale a $k$ dimensioni. Elementi di calcolo vettoriale**

1. Lo spazio numerico reale a $k$ dimensioni	» 196
2. Lo spazio euclideo reale a $k$ dimensioni	» 199
3. Elementi di topologia in $\mathbf{R}^k$	» 200
4. Lo spazio vettoriale $\mathbf{R}^k$	» 205
5. Segmenti e rette di $\mathbf{R}^k$ ; poligoni. Coseni direttori di un asse	» 207
6. Rappresentazione geometrica dei vettori di $\mathbf{R}^k$	» 212
7. Prodotto scalare di due vettori di $\mathbf{R}^k$	» 215
8. Prodotto vettoriale di due vettori di $\mathbf{R}^3$ . Prodotto misto	» 219
9. Ulteriori sistemi di riferimento nello spazio $\mathbf{R}^3$	» 223
9.I. Coordinate cilindriche	» 223
9.II. Coordinate polari	» 224

**Capitolo 5. Funzioni reali di più variabili reali.  
Funzioni vettoriali. Limiti e continuità.**

1. Funzioni reali di $k$ variabili reali	pag. 226
2. Funzioni vettoriali. Campi vettoriali	» 233
3. Operatori lineari di $\mathbf{R}^1$ in $\mathbf{R}^n$ . Autovalori, autovettori	» 235
4. Funzioni composte	» 237
5. Limiti delle funzioni di più variabili. Successioni di punti di $\mathbf{R}^k$	» 239
5.I. Limiti delle funzioni scalari	» 239
5.II. Limiti delle funzioni vettoriali	» 241
5.III. Successioni di punti di $\mathbf{R}^k$	» 242
5.IV. Osservazioni	» 244
5.V. Inversione dei limiti	» 245
5.VI. Massimo e minimo limite. Criterio di convergenza di Cauchy	» 250
6. Funzioni continue di più variabili	» 250
6.I. Le funzioni continue in un insieme compatto	» 253
6.II. Le funzioni continue in un insieme connesso	» 255
7. Cenni sulle successioni e sulle serie di funzioni di più variabili	» 258

**Capitolo 6. / Calcolo differenziale per le funzioni di più variabili.**

1. Derivate parziali	» 260
1.I. Derivate parziali delle funzioni di due variabili	» 260
1.II. Derivate parziali delle funzioni di $k$ variabili. Gradiente di una funzione scalare	» 267
1.III. Derivate delle funzioni vettoriali. Matrici jacobiane	» 271
1.IV. Funzioni di classe $C^m$ . Derivate parziali sulla frontiera	» 276
1.V. Divergenza e rotore di un campo vettoriale. L'operatore di Laplace	» 280
2. Differenziali delle funzioni di più variabili	» 283
3. Funzioni differenziabili	» 286
4. Derivate e differenziali delle funzioni composte	» 291
4.I. Funzioni composte scalari di una variabile	» 291
4.II. Funzioni composte scalari di $k$ variabili	» 295
4.III. Funzioni composte vettoriali	» 296
5. Derivazione delle funzioni composte sulla frontiera	» 298
6. Derivate direzionali	» 306
7. Piano tangente ad una superficie di equazione $z = f(x, y)$	» 309
8. Il teorema di Lagrange e la formula di Taylor per le funzioni di più variabili. Funzioni con derivate nulle	» 312
8.I. Teorema di Lagrange	» 312
8.II. Formula di Taylor	» 313
8.III. Funzioni con derivate nulle	» 314
9. Massimi e minimi relativi delle funzioni di più variabili. Estremi assoluti	» 315
9.I. Funzioni di due variabili	» 315
9.II. Funzioni di $k$ variabili	» 321
9.III. Estremi assoluti	» 323
10. Le funzioni omogenee	» 324
11. Funzioni definite mediante integrali. Passaggio al limite e derivazione sotto il segno di integrale. Inversione dell'ordine delle integrazioni	» 329
11.I. Integrando continuo in un intervallo compatto	» 330
11.II. Integrando continuo in un intervallo non compatto	» 338

11.III. Integrando discontinuo internamente all'intervallo di integrazione	pag. 345
11.IV. Inversione dell'ordine delle integrazioni	» 345

## Capitolo 7. Geometria differenziale delle curve.

1. Curve del piano e dello spazio. Curve semplici	» 363
1.I. Curve chiuse, curve aperte. Punti multipli di una curva	» 366
1.II. Curve semplici	» 368
1.III. Curve semplici orientate. Archi semplici	» 372
2. Retta tangente. Curve regolari	» 375
2.I. La nozione di retta tangente per le curve semplici	» 375
2.II. Estensione alle curve intrecciate	» 379
2.III. Curve semplici regolari	» 381
2.IV. Orientamenti di una curva chiusa regolare	» 383
2.V. Complementi sulle curve piane	» 385
3. Rettificazione delle curve regolari	» 389
4. Ascissa curvilinea	» 392
5. Triedro fondamentale di una curva dello spazio in un punto	» 396
6. Comportamento di una curva rispetto al triedro fondamentale	» 401
7. Curve biregolari riferite ad un parametro qualsiasi	» 402
8. Curvatura e torsione	» 405
8.I. Curvatura	» 405
8.II. Torsione	» 409
8.III. Le formule di Frenet	» 412
8.IV. Espressioni della curvatura e della torsione con riferimento ad un parametro qualsiasi	» 413
9. Curve generalmente regolari	» 415
10. Domini ed aperti del piano semplicemente connessi. Domini piani regolari ed orientamento della frontiera	» 420
11. Ulteriori considerazioni sulle curve piane	» 425
11.I. Diagrammi polari. Equazioni parametriche polari	» 425
11.II. Complementi sullo studio delle curve piane	» 430
11.III. Evoluta ed evolventi di una curva piana	» 433
12. Esempi	» 437
1. La cicloide	» 438
2. Ipicicloidi ed epicicloidi	» 442
2.I. Generalità	» 442
2.II. Esempi di ipocicloidi. Ellisse, ipocicloide $n$ -cuspidale, asteroide	» 445
2.III. Esempi di epicicloidi. Lomaca di Pascal e cardioide	» 446
3. La clotoide	» 448
4. Le spirali	» 451

## Capitolo 8. Funzioni implicite.

1. Generalità. Teorema del Dini	» 453
2. Equazione implicita di una curva piana. Linee di livello di una funzione di due variabili	» 461
3. Equazione implicita di una superficie. Superfici di livello di una funzione di tre variabili	» 467
4. Sistemi di funzioni implicite. Equazioni implicite di una curva regolare dello spazio	» 468
5. Invertibilità di un'applicazione di $\mathbf{R}^3$ in $\mathbf{R}^3$	» 473

6. Involuppo di una famiglia di curve piane	pag. 477
7. Cenni sulla dipendenza funzionale	» 486
8. Problemi di estremo condizionato	» 488

### Capitolo 9. Elementi di geometria differenziale delle superfici.

1. Generalità	» 497
2. Porzioni di superficie regolare	» 500
3. Piano tangente ad una porzione di superficie regolare	» 505
4. Orientamento di una porzione di superficie regolare. Superfici regolari e orientamenti del bordo	» 507
5. Coordinate curvilinee su una superficie	» 510
6. Superfici cilindriche	» 511
7. Superfici di rotazione	» 515
8. Superfici generalmente regolari, Domini regolari dello spazio e orientamento della frontiera	» 520

### Capitolo 10. Integrali curvilinei.

1. Integrale curvilineo di una funzione di due o di tre variabili	» 523
2. Integrale curvilineo di una forma differenziale lineare	» 528
3. Circoscrizione di un vettore lungo la frontiera di un dominio regolare o lungo il bordo di una superficie regolare	» 532
4. Forme differenziali esatte. Campi conservativi. Caso dei coefficienti continui	» 533
5. Forme differenziali esatte a coefficienti derivabili	» 538
5.I. Forme differenziali in due variabili in un aperto	» 538
5.II. Forme differenziali in due variabili in un rettangolo	» 541
5.III. Forme differenziali in tre variabili	» 543
6. Cenni sui potenziali non uniformi nel piano	» 546

### Capitolo 11. Integrali doppi, integrali superficiali, integrali tripli.

1. Elementi di teoria della misura per gli insiemi di punti dello spazio	» 552
2. Volume del cilindroide	» 557
3. Integrale doppio di una funzione continua in un insieme compatto e misurabile	» 559
4. Proprietà degli integrali doppi	» 563
5. Integrale doppio di una funzione continua in un insieme misurabile non compatto, e di una funzione continua quasi ovunque in un insieme misurabile	» 565
6. Insiemi normali del piano e dello spazio	» 571
7. Formula di riduzione degli integrali doppi	» 573
7.I. Caso dell'insieme di integrazione compatto	» 573
7.II. La formula di inversione di Dirichlet	» 578
7.III. Caso dell'insieme di integrazione non compatto	» 580
8. Formule di Gauss e di Green, Teorema della divergenza e teorema di Stokes nel piano	» 583
9. Calcolo dell'area di un dominio regolare mediante un integrale curvilineo. Area del settore polare	» 589
10. Cambiamento delle variabili negli integrali doppi	» 590
10.I. Caso della funzione costante, Interpretazione geometrica dello jacobiano	» 590

**Capitolo 13. Cenni sulle funzioni di una variabile complessa.**

1. Generalità. Funzioni oloomorfe	pag. 699
2. Trasformazioni conformi	» 705
3. Le funzioni elementari nel campo complesso	» 710
3.I. La funzione esponenziale $e^z$	» 710
3.II. Le funzioni circolari e le funzioni iperboliche	» 711
3.III. La funzione logaritmo. Cenni sulle funzioni ploidrome	» 715
3.IV. La funzione potenza	» 720
3.V. Le inverse delle funzioni circolari	» 723
3.VI. Le inverse delle funzioni iperboliche	» 727

<i>Indice analitico</i>	» 729
-------------------------	-------

10.II. Caso generale	pag. 592
10.III. Passaggio a coordinate polari. Applicazione al calcolo del volume di un solido di rotazione	» 595
11. Criteri di sommabilità	» 601
12. Area di una superficie regolare	» 604
13. Calcolo dell'area di una superficie cilindrica e di una superficie di rotazione	» 609
14. Integrale superficiale di una funzione continua	» 611
15. Integrale superficiale di una forma differenziale quadratica. Teorema di Stokes	» 613
16. Integrali tripli	» 617
17. Formule di Gauss e di Ostrogradski. Teorema della divergenza nello spazio	» 621
18. Cambiamento delle variabili negli integrali tripli	» 625
19. Calcolo degli integrali tripli in coordinate cilindriche e in coordinate polari. Criteri di sommabilità	» 626
19.I. Coordinate cilindriche	» 627
19.II. Coordinate polari	» 628
19.III. Criteri di sommabilità	» 630
20. Potenziale vettore. Campi solenoidali	» 631

## Capitolo 12. Equazioni differenziali.

1. Generalità	» 637
2. Teoremi di esistenza e unicità	» 641
2.I. Teoremi per l'equazione del primo ordine	» 641
2.II. Teoremi per i sistemi di $n$ equazioni del primo ordine	» 649
2.III. Teoremi per l'equazione di ordine $n$	» 651
3. Integrale generale e integrali particolari	» 653
3.I. Equazioni di forma normale in uno strato	» 653
3.II. Equazioni del primo ordine di forma normale in un aperto	» 656
3.III. Equazioni del primo ordine di forma non normale	» 658
4. Integrali singolari dell'equazione del primo ordine di forma non normale. L'equazione di Clairaut	» 660
5. Costruzione di equazioni differenziali per eliminazione di costanti	» 663
6. Integrazione di alcuni tipi di equazioni del primo ordine	» 667
6.I. Equazioni a variabili separabili	» 667
6.II. Equazioni a secondo membro omogeneo	» 669
6.III. Equazioni del tipo $y' = g\left(\frac{ax+by+c}{d'x+b'y+c'}\right)$	» 670
6.IV. L'equazione di Bernoulli	» 671
6.V. Equazioni differenziali esatte	» 671
6.VI. Equazioni mancanti di una variabile	» 672
7. Integrazione di alcuni tipi di equazioni di ordine superiore al primo	» 674
7.I. Equazioni mancanti della $y$	» 674
7.II. Equazioni mancanti della $x$	» 675
7.III. L'equazione di Lagrange	» 676
8. Esempi	» 677
9. Cenni sui sistemi di equazioni differenziali lineari	» 685
9.I. Sistemi omogenei	» 687
9.II. Sistemi completi	» 690
9.III. Sistemi omogenei a coefficienti costanti	» 692