

**ALBERTO TESEI**

# **ISTITUZIONI DI ANALISI SUPERIORE**



**BOLLATI BORINGHIERI**

# Indice

## *Prefazione*

VII

### 0 Richiami

I

0.1 Numeri reali, 1    0.2 Limiti, 3    0.3 Sviluppi in base  $p$ , 8

### 1 Insiemi

13

1.1 Operazioni su insiemi, 13    1.2 Funzioni, 18    1.3 Cardinalità, 21  
1.4 Relazioni, 24    1.5 Ricoprimenti in  $\mathbb{R}^n$ , 25

### 2 Famiglie di insiemi

31

2.1 Algebre, 31    2.2  $\sigma$ -algebre, 35    2.3 Topologie, 38    2.4 Insiemi di Borel, 41    2.5 Classi monotone, 45

### 3 Misure positive

48

3.1 Definizione e prime proprietà, 49    3.2 Insiemi di misura nulla, 54  
3.3 Misure esterne, 60    3.4 Generazione di misure, 62    3.5 Estensione di misure, 66

### 4 Misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$

75

4.1 Definizione e prime proprietà, 76    4.2 Misura interna, 81    4.3 Regolarità, 91    4.4 Covarianza, 97    4.5 Insiemi di Borel e insiemi di Lebesgue, 100  
4.6 Misura di Lebesgue-Stieltjes su  $\mathbb{R}$ , 109    4.7 Misura di Lebesgue in  $\mathbb{R}^n$ , 117

### 5 Funzioni misurabili

109

5.1 Definizione e prime proprietà, 120    5.2 Funzioni a valori in  $\mathbb{R}$ , 123  
5.3 Funzioni semplici, 130    5.4 Funzioni quasi continue, 135    5.5 Funzioni essenzialmente limitate, 140    5.6 Funzione di Lebesgue-Vitali, 143

<b>6</b>	<b>Integrale di Lebesgue</b>	<b>150</b>
6.1	Integrale di funzioni semplici nonnegative, 151	
6.2	Integrale di funzioni nonnegative, 156	
6.3	Teorema di convergenza monotona, 160	
6.4	Insiemi di misura nulla, 166	
6.5	Funzioni integrabili, 172	
6.6	Teorema di convergenza dominata, 179	
6.7	Integrale di Riemann e integrale di Lebesgue, 184	
<b>7</b>	<b>Spazi di Lebesgue</b>	<b>194</b>
7.1	Richiami, 194	
7.2	Alcune disuguaglianze, 201	
7.3	Definizione degli spazi $L^p$ , 207	
7.4	Completezza degli spazi $L^p$ , 210	
7.5	Separabilità degli spazi $L^p$ , 214	
7.6	Uniforme convessità degli spazi $L^p$ , 219	
7.7	Dualità negli spazi $L^p$ , 224	
<b>8</b>	<b>Risultati di convergenza</b>	<b>234</b>
8.1	Convergenza in misura, 235	
8.2	Convergenza quasi uniforme, 242	
8.3	Uniforme integrabilità, 248	
8.4	Diagrammi di convergenza, 254	
<b>9</b>	<b>Misure prodotto</b>	<b>255</b>
9.1	Prodotto di spazi misurabili, 255	
9.2	Funzioni misurabili e spazi prodotto, 257	
9.3	Misura prodotto, 261	
9.4	Teorema di Fubini, 271	
9.5	Convulsione, 280	
<b>10</b>	<b>Derivazione</b>	<b>288</b>
10.1	Derivazione di funzioni monotone, 290	
10.2	Funzioni a variazione limitata, 303	
10.3	Funzioni assolutamente continue, 311	
10.4	Derivazione e integrazione, 318	
10.5	Integrazione per parti e per sostituzione, 327	
10.6	Funzioni a salti, 329	
<b>11</b>	<b>Misure con segno</b>	<b>334</b>
11.1	Definizione e prime proprietà, 335	
11.2	Decomposizione di Jordan e decomposizione di Hahn, 340	
11.3	Classificazione di misure con segno, 345	
11.4	Decomposizione di Lebesgue, 351	
11.5	Decomposizione di misure di Borel su $\mathbb{R}$ , 360	
<b>12</b>	<b>Spazi di Hilbert</b>	<b>371</b>
12.1	Spazi euclidei, 371	
12.2	Identità del parallelogramma e di polarizzazione, 375	
12.3	Decomposizione ortogonale, 378	
12.4	Dualità, 385	
12.5	Sistemi ortonormali, 387	
12.6	Serie trigonometriche, 397	
	<i>Bibliografia</i>	<b>405</b>
	<i>Lista dei simboli</i>	<b>407</b>
	<i>Indice analitico</i>	<b>411</b>