

**Paulo Ribenboim**

# L'ARITHMÉTIQUE DES CORPS

# Table

## I Exposé succinct de la théorie des corps 13

- 1 Généralités sur les corps et la notion d'extension 13
- 2 Extensions algébriques 15
- 3 Clôture algébrique d'un corps 16
- 4 Extensions séparables 21
- 5 Trace et norme 27
- 6 Extensions normales 28
- 7 Extensions galoisiennes 29
- 8 Corps finis 32
- 9 Extensions cyclotomiques 35

## II Classes résiduelles et loi de réciprocité quadratique 37

- 1 Classes résiduelles 37
- 2 Loi de réciprocité quadratique 40

## III Récapitulation sur les groupes finis 47

- 1 Généralités sur les groupes finis 47
- 2 Théorèmes de Sylow 49
- 3  $p$ -groupes 51
- 4 Caractères des groupes abéliens finis 53

## IV Les nombres $p$ -adiques 59

- 1 Valeur absolue d'un corps 59
- 2 Complétion d'un corps valué. Nombres  $p$ -adiques 64
- 3 Fonctions exponentielles et logarithmes 68
- 4 Valuations d'un corps 76
- 5 Corps valués henséliens 84
- 6 Compacité d'un anneau de valuation 90

## TABLE

|   |     |
|---|-----|
| <b>V Les corps valués de Witt</b>   | 93  |
| 1 Anneau de Witt  | 93  |
| 2 Corps de Witt   | 97  |
| 3 Représentants multiplicatifs  | 100 |
| <br>  |     |
| <b>VI Etude de quelques classes d'extensions galoisiennes</b>                               | 107 |
| 1 Extensions cycliques de degré égal à la caractéristique                                   | 107 |
| 2 Extensions cycliques de Kummer  | 109 |
| 3 Extensions abéliennes de Kummer   | 112 |
| 4 $p$ -extensions abéliennes  | 114 |
| <br>  |     |
| <b>VII Théorie de Galois pour les extensions de degré infini</b>                            | 121 |
| 1 Rappel sur les groupes topologiques   | 121 |
| 2 Limite projective   | 122 |
| 3 Groupe de Galois d'une extension de degré infini  | 126 |
| 4 Groupe de Galois de la clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$                               | 130 |
| <br>  |     |
| <b>VIII La clôture abélienne du corps des rationnels</b>                                    | 135 |
| <br>  |     |
| <b>IX Les corps ordonnables</b>   | 143 |
| 1 Corps ordonnés  | 143 |
| 2 Corps ordonnables   | 145 |
| 3 Extensions ordonnées  | 148 |
| 4 Le théorème de Sturm  | 159 |
| 5 Extension ordonnée maximale   | 163 |
| 6 Exemples d'applications en théorie des nombres algébriques                                | 166 |
| <br>  |     |
| <b>X Sommes de carrés</b>   | 177 |
| 1 Somme des carrés de deux entiers  | 177 |
| 2 Le théorème de Lagrange   | 179 |
| 3 Les sommes de 2 <sup>e</sup> carrés d'éléments d'un corps forment un groupe multiplicatif | 184 |
| 4 Le niveau d'un corps  | 191 |
| 5 17 <sup>e</sup> problème de Hilbert   | 198 |
| <br>  |     |
| <b>XI La dimension diophantienne des corps</b>  | 213 |
| 1 Dimension diophantienne   | 213 |
| 2 Relations entre les dimensions diophantiennes de deux corps                               | 217 |
| 3 Dimension diophantienne de $\mathbb{Q}_p$   | 226 |
| <br>  |     |
| <b>Bibliographie</b>  | 235 |
| <br>  |     |
| <b>Index</b>  | 241 |