

Quaderni dell'Unione Matematica Italiana



A. Orsatti

Introduzione ai gruppi abeliani astratti e topologici

Clarendon Editrice • Bologna 1979

INDICE

Premessa	1
 Cap. I. GENERALITA' SUI GRUPPI ABELIANI	
1. Nozioni preliminari e richiami	3
1.1. $\mathbb{Z}$ -moduli	3
1.2. Sottogruppi	3
1.3. Morfismi	5
1.4. Gruppo quoziente	5
1.5. Teoremi di omomorfismo	6
1.6. Hom ed End	7
1.7. Gruppi ciclici	10
 2. Prodotti diretti e somme dirette	12
2.1. Definizioni	12
2.2. Proprietà universali	13
2.3. Somme dirette di sottogruppi	16
2.4. Sottogruppo di torsione. Decomposizione primaria di un gruppo di torsione	18
2.5. $\mathbb{Z}_p$ -moduli	20
2.6. Esempi ed esercizi	21
 3. Gruppi liberi e gruppi divisibili	22
3.1. Sottoinsiemi liberi	22
3.2. Gruppi liberi	24
3.3. Gruppi divisibili	29
3.4. Struttura dei gruppi divisibili	32
3.5. Involuppo iniettivo di un gruppo	34

IV

3.6. Complementi ed esercizi	38
4. Sottogruppi puri e loro applicazioni	41
4.1. Primo proprietà dei sottogruppi puri	41
4.2. Sottogruppi basil	43
4.3. Sottogruppi puri di esponente finito	46
4.4. Gruppi finitamente generati	47
4.5. Risoluzioni pure-proiettive e pure-iniettive di un gruppo	48
4.6. Complementi ed esercizi	52
5. Gruppi di estensioni e prodotto tensoriale (cenni)	55
5.1. Estensioni	55
5.2. Sistemi di fattori	55
5.3. Gruppi di estensioni	58
5.4. Funzionalità di Ext	62
5.5. Pull-back e Push-out	63
5.6. Estensioni pure	65
5.7. Alcune proprietà di Ext e di Pext	67
5.8. Prodotto tensoriale	68

Cap. II. GRUPPI TOPOLOGICI

1. Richiami di topologia generale	71
1.1. Basi	71
1.2. Filtri	72
1.3. Topologia debole	73
1.4. Topologia prodotto e topologia quoziente	73
1.5. Spazi compatti	74
1.6. Connessione	75
1.7. Spazi metrici	75
1.8. Convergenza	76
1.9. Prolungamento delle identità	78
2. Generalità sui gruppi topologici	78
2.1. Definizioni	78
2.2. Esempi	79
2.3. Intorni dello zero in un gruppo topologico	79
2.4. Chiusura, morfismi continui, gruppo quoziente, prodotti	83
2.5. Alcuni teoremi utili	87
2.6. Seminorme, pseudo-metriche invarianti, completa regolarità dei gruppi topologici	90

3. Gruppi topologici completi. Completamento	95
3.1. Gruppi completi	95
3.2. Esempi	97
3.3. Completamento	99
3.4. Completamento di un gruppo linearmente topologizzato	106
3.5. L'anello degli interi p -adici	109
4. Cenni sugli anelli ed i moduli topologici	113
5. La topologia naturale	116
5.1. Definizioni	116
5.2. Il completamento naturale	117
5.3. Alcune proprietà della topologia naturale	120
5.4. La topologia p -adica	121
5.5. Alcuni risultati sui gruppi completi nella topologia naturale	122

Cap. III. GRUPPI COMPATTI

Introduzione	125
1. Prerequisiti di Analisi	126
1.1. Topologia della convergenza uniforme	126
1.2. Teorema di Stone-Weierstrass	127
1.3. Funzioni continue su un gruppo compatto	128
2. Integrazione su uno spazio compatto	128
2.1. Funzionali lineari positivi	128
2.2. Teorema di Fubini	130
3. Esistenza ed unicità dell'integrale di Haar su un gruppo compatto	133
3.1. Enunciato del teorema di esistenza ed unicità	133
3.2. Dimostrazione dell'esistenza dell'integrale di Haar	134
3.3. Unicità dell'integrale di Haar	140
3.4. Prodotto di convoluzione	142
4. Richiami di algebra lineare	142
4.1. Spazi euclidei e spazi unitari	142
4.2. Norma	144
4.3. Lemma di Schur	144
4.4. Decomposizione di uno spazio unitario	145

VI

5.	Teorema di Peter-Weyl	146
5.1.	Enunciato del teorema	146
5.2.	Premesse alla dimostrazione	147
5.3.	Operatori speciali su un gruppo compatto	150
5.4.	Dimostrazione del teorema di Peter-Weyl	158
6.	Gruppi di caratteri	160
6.1.	Il gruppo $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$	160
6.2.	Topologia della convergenza uniforme sui compatti	165
6.3.	Primi risultati sul gruppo dei caratteri. Esempi	166
6.4.	Gruppo dei caratteri di un prodotto topologico di gruppi compatti e di una somma diretta di gruppi discreti	168
6.5.	Il morfismo canonico. Riflessività dei gruppi discreti	170
7.	Dualità di Pontryagin	172
7.1.	Alcune conseguenze del teorema di Peter-Weyl	172
7.2.	Il teorema di dualità tra i gruppi compatti ed i gruppi discreti	173
7.3.	Gruppi precompatti ed estensione dei caratteri	174
7.4.	Duali dei sottogruppi e delle immagini omomorfe	176
7.5.	Alcune applicazioni della dualità	177

Cap. IV. GRUPPI ALGEBRICAMENTE COMPATTI E GRUPPI DI COTORSIONE.

Introduzione	183
1. Gruppi algebricamente compatti	184
1.1. Gruppi puri-iniettivi	184
1.2. Sistemi di equazioni lineari	186
1.3. Gruppi completi nella topologia naturale	187
1.4. Estensioni pure-essenziali	191
1.5. Altre proprietà dei gruppi algebricamente compatti	193
1.6. Alcune osservazioni sul completamento naturale. Determinazione degli in- varianti di un gruppo algebricamente compatto	196
1.7. Struttura algebrica dei gruppi compatti	202
2. Gruppi di cotorsione	205
2.1. Definizioni	205
2.2. Caratterizzazione omologica dei gruppi di cotorsione	205
2.3. Completamento cotorsionale	208
2.4. Gruppi di cotorsione e gruppi algebricamente compatti	211
2.5. Gruppi torsionalmente completi	214

2.6. Teoremi di struttura per i gruppi di cotorsione	215
--	-----

Cap. V. ARGOMENTI SPECIALI

1. Immagini omomorfe dei prodotti diretti	221
1.1. I teoremi di Balcerzyk-Hulanicki e di Fuchs	221
1.2. Generalizzazione dei risultati precedenti	223
2. Gruppi slender	228
2.1. Definizioni e prime proprietà	228
2.2. Teoremi di Łoś e di Nunke	230
2.3. I gruppi della classe $L\Omega_1$ e la dimostrazione del teorema di Nunke	232
2.4. Altre proprietà dei gruppi slender	234
3. Anelli di endomorfismi di gruppi ridotti e senza torsione	236
3.1. Preliminari	236
3.2. I teoremi di Corner	238
3.3. Dimostrazione del primo teorema di Corner	243
3.4. Risultati ulteriori	247
Bibliografia	257