

E. MARCHIONNA C. MARCHIONNA TIBILETTI

LEZIONI DI ALGEBRA

per gli studenti dell'Università di Milano

2^a edizione

MASSON 

Milano • Parigi • Barcellona • Bonn
1992

Capitolo I - PRIMI ELEMENTI DELLA TEORIA DEGLI INSIEMI

§ 1. Unione ed intersezione dei sottoinsiemi di un insieme

1. Nomenclatura ed operazioni principali.....	pag. 5
2. Principali proprietà delle operazioni insiemistiche.....	" 7
3. Cenni sulla regola di dualità.....	" 10

§ 2. Applicazioni fra insiemi

4. Applicazioni (Funzioni).....	" 11
5. Esempi sulle applicazioni.....	" 14
6. Prodotto di applicazioni.....	" 15

§ 3. Sul prodotto di insiemi

7. Prodotto insiemistico.....	" 18
8. Sul concetto di corrispondenza fra insiemi.....	" 19
9. Sul concetto di operazione.....	" 20

§ 4. Relazioni di equivalenza in un insieme

10. Relazioni di equivalenza e partizioni in classi.....	" 22
11. Esempi di relazioni di equivalenza.....	" 24
12. Insieme quoziente di un insieme S rispetto ad una relazione di equivalenza R.....	" 26

§ 5. Cenni sugli insiemi ordinati

13. Relazioni d'ordine in un insieme.....	" 27
14. Elementi massimali e minimali di un insieme parzialmente ordinato. Maggioranti e minoranti.....	" 29
15. Cenni sul postulato di Zermelo e sul Lemma di Zorn.....	" 32

Capitolo II - ELEMENTI DI TEORIA DEI GRUPPI

§ 6. Prime proprietà delle strutture gruppali

16. Proprietà delle leggi di composizione interne. Esempi.....	" 34
17. Concetto di gruppo. Esempi.....	" 43
18. Strutture gruppali nell'insieme delle classi di resti modulo n.....	" 48
19. Riduzione dei postulati che definiscono un gruppo.....	" 53
20. Prime proprietà dei gruppi.....	" 54
21. Potenze degli elementi di un gruppo.....	" 57
22. Sottogruppi di un gruppo.....	" 59
23. Gruppi ciclici.....	" 62
24. Ordine o periodo di un elemento di un gruppo.....	" 64
25. Alcune proprietà dei gruppi ciclici.....	" 68
26. Lateralì di un sottogruppo.....	" 69
27. Proprietà dei lateralì.....	" 70

28. Il Teorema di Lagrange.....	pag. 72
29. Sui trasformati degli elementi di un gruppo.....	" 73
30. Trasformato di un sottogruppo di un gruppo.....	" 75
31. Sottogruppi normali.....	" 76
32. Prodotto dei laterali di un sottogruppo normale.....	" 78
33. Gruppo quoziente (o fattoriale).....	" 80
S 7. Gruppi di trasformazioni	
34. Prime proprietà dei gruppi di trasformazioni.....	" 81
35. Gruppo totale delle sostituzioni su n elementi.....	" 83
36. Studio di un gruppo non ciclico di ordine 4.....	" 88
37. Il gruppo totale delle sostituzioni su tre elementi.....	" 89
S 8. Isomorfismi ed omoomorfismi fra gruppi	
38. Sul concetto di isomorfismo.....	" 90
39. Alcune proprietà degli isomorfismi.....	" 93
40. Determinazione dei gruppi di ordine 4 distinti rispetto agli isomorfismi.....	" 95
41. Cayleyano di un gruppo.....	" 99
42. Cenni sugli automorfismi di un gruppo.....	" 100
43. Omoomorfismi fra gruppi. Prime proprietà.....	" 102
44. Omoomorfismi suriettivi ed iniettivi.....	" 107
45. Proprietà principali dell'omoomorfismo fra gruppi. Cenni sugli endomorfismi.....	" 111
S 9. Operazioni sui sottogruppi di un gruppo	
46. Intersezione di sottogruppi di un gruppo.....	" 118
47. Sottogruppo generato da un sottoinsieme di un gruppo.....	" 119
48. Unione di sottogruppi di un gruppo.....	" 120
49. Prodotto di due sottogruppi in un gruppo.....	" 123
50. Sottogruppi permutabili in un gruppo.....	" 125
51. Condizioni caratteristiche affinché il prodotto di due sottogruppi di un gruppo sia un sottogruppo.....	" 126
52. Intersezione ed unione di due sottogruppi normali di un gruppo.....	" 131
53. Sui prodotti di sottogruppi permutabili in senso stretto.....	" 132
54. Prodotto diretto di sottogruppi di un gruppo.....	" 134
55. Prodotto diretto di gruppi arbitrari.....	" 139
S 10. Sui Teoremi di Sylow	
56. Classi di elementi coniugati. Centro di un gruppo.....	" 140
57. Normalizzante di un elemento di un gruppo.....	" 142
58. Il primo Teorema di Sylow.....	" 144
59. Cenni sul secondo Teorema di Sylow.....	" 148
S 11. Sui gruppi abeliani	
60. Inversione del Teorema di Lagrange per un gruppo abeliano finito G	" 150
61. Sui periodi degli elementi di un gruppo abeliano.....	" 152
62. Sistemi di generatori e basi di un gruppo abeliano.....	" 155
63. Notizie sulla base di un gruppo abeliano dotato di un numero finito di generatori.....	" 160

Capitolo III - ELEMENTI DI TEORIA DEGLI ANELLI

§ 12. Prime proprietà degli anelli e dei corpi

64. Gruppi additivi.....	pag. 165
65. Definizione di anello.....	" 169
66. Esempi di anelli.....	" 173
67. Divisori dello zero in un anello. Domini d'integrità.....	" 174
68. Definizione di corpo. Prime proprietà.....	" 176
69. Digressione sugli anelli di matrici.....	" 182
70. Digressione sul corpo dei quaternioni.....	" 186
71. Sottoscelli di un anello.....	" 189
72. Sottocorpi di un corpo.....	" 190
73. Centro di un anello e di un corpo.....	" 191
74. Ideali di un anello.....	" 192
75. Lateralità di un ideale bilatero in un anello.....	" 196
76. Anello quoziente.....	" 199

§ 13. Omorfismi ed isomorfismi fra anelli

77. Omorfismi fra anelli.....	" 200
78. Omorfismi suriettivi ed iniettivi fra anelli. Isomorfismi.....	" 204
79. Principali proprietà degli omorfismi fra anelli.....	" 207
80. Omorfismi ed isomorfismi generalizzati.....	" 210

§ 14. Operazioni sugli ideali di un anello

81. Intersezione di ideali.....	" 213
82. Somma di ideali.....	" 214
83. Somma diretta di ideali di un anello.....	" 215
84. Somma diretta di anelli arbitrari.....	" 216
85. Prodotto di ideali.....	" 218
86. Quoziente di due ideali.....	" 219
87. La potenza di un binomio in un anello. Radicale di un ideale... "	220

§ 15. Ideali notevoli di un anello commutativo. Anelli noetheriani

88. Ideali principali. Ideali dotati di un numero finito di generatori.....	" 222
89. Ideali massimali.....	" 226
90. Ideali primi.....	" 229
91. Ideali primari.....	" 232
92. Sui radicali degli ideali primari.....	" 234
93. Ideali irriducibili. Anelli noetheriani.....	" 237
94. Teorema di Lasker-Noether.....	" 242

§ 16. Sulla caratteristica di un anello

95. Caratteristica di un elemento in un anello.....	" 244
96. Caratteristica di un anello.....	" 245
97. Ideali di Sylow in un anello finito.....	" 247
98. Caratteristica di un corpo.....	" 249
99. Ordine di un anello finito di caratteristica p.....	" 250
100. Potenza di un binomio in un anello di caratteristica p.....	" 251
101. Omorfismo fra l'anello \mathbb{Z} degli interi relativi e l'anello M dei multipli dell'unità di un anello A	" 252
102. Sottocorpo minimo di un corpo di caratteristica p.....	" 254

103. Sottocorpo minimo di un corpo di caratteristica zero.....	pag. 255
104. Corpi primi.....	" 257
§ 17. <u>Sopra alcuni problemi di immersione</u>	
105. Calcolo frazionario in un campo.....	" 258
106. Campo dei quozienti.....	" 259
107. Immersione di un dominio d'integrità in un campo.....	" 263
108. Digressione sull'immersione di un semigruppò commutativo regolare in un gruppo.....	" 269
109. Immersione di un semianello regolare in un anello.....	" 274
§ 18. <u>Cenni sugli anelli ordinati</u>	
110. Gruppi ordinati.....	" 279
111. Anelli e corpi ordinati.....	" 283
112. Cenni sugli anelli archimedei.....	" 288
§ 19. <u>Anelli di polinomi</u>	
113. Polinomi in una indeterminata sopra un anello.....	" 290
114. Somma e prodotto di polinomi.....	" 292
115. Anelli di polinomi.....	" 294
116. Prime proprietà degli anelli di polinomi.....	" 297
117. Divisione fra polinomi su un corpo K	" 299
118. Ideali di un anello di polinomi sopra un corpo.....	" 302
119. Massimo comun divisore di due polinomi.....	" 304
120. Ideali di polinomi e massimo comun divisore.....	" 306
121. Polinomi riducibili ed irriducibili.....	" 307
122. Radici di un polinomio.....	" 312
§ 20. <u>Questioni di divisibilità in un dominio d'integrità unitario</u>	
123. Elementi unitari di un anello.....	" 317
124. Divisibilità in un dominio d'integrità unitario.....	" 319
125. Massimo comun divisore in un dominio d'integrità unitario.....	" 322
126. Anelli gaussiani.....	" 324
127. Sugli ideali principali di un dominio d'integrità unitario.....	" 335
128. Domini ad ideali principali.....	" 337
129. Domini euclidei.....	" 340
§ 21. <u>Teoremi di trasporto per anelli gaussiani e noetheriani</u>	
130. Polinomi primitivi con coefficienti in un anello gaussiano.....	" 342
131. Teorema del "trasporto" per gli anelli gaussiani.....	" 347
132. Il Teorema della base di Hilbert.....	" 349
133. Osservazioni sui "Teoremi di trasporto".....	" 355
§ 22. <u>Cenni sugli anelli di polinomi in più indeterminate</u>	
134. Polinomi in più indeterminate su un anello.....	" 356
135. Qualche proprietà degli anelli di polinomi in più indeterminate.....	" 357
§ 23. <u>Cenni sulla teoria dei reticoli. Anelli di Boole</u>	
136. I reticoli come strutture algebriche.....	" 358
137. I reticoli come insiemi parzialmente ordinati.....	" 360
138. Zero ed unità in un reticolo. Sottoreticoli ed ideali.....	" 363
139. Esempi di reticoli.....	" 365

140. Omoomorfismi ed isomorfismi fra reticoli.....	pag. 367
141. Reticoli duali. Legge di dualità.....	" 369
142. Cenni sui reticoli modulari, distributivi, complementati...	" 370
143. Reticoli di Boole.....	" 372
144. Anelli di Boole.....	" 375

Capitolo IV - ELEMENTI DELLA TEORIA DEI MODULI E DEGLI SPAZI
VETTORIALI

§ 24. Moduli sopra un anello

145. Definizioni di A-modulo, di spazio vettoriale e di algebra sopra un anello.....	" 381
146. Prime proprietà degli A-moduli e degli spazi vettoriali....	" 385
147. Sottomoduli di un A-modulo e sottospazi di uno spazio vettoriale.....	" 387
148. Quoziente di un A-modulo rispetto a un suo sottomodulo....	" 389
149. Omoomorfismi ed isomorfismi fra A-moduli.....	" 391
150. Intersezione e somma di sottomoduli di un A-modulo.....	" 397
151. Somma diretta finita di sottomoduli di un A-modulo.....	" 399
152. Somma diretta finita di A-moduli arbitrari.....	" 401
153. Somma diretta di una famiglia di A-moduli.....	" 402
154. Moduli dotati di un numero finito di generatori.....	" 405

§ 25. Spazi vettoriali di dimensione finita

155. Dipendenza lineare.....	= 409
156. Sistemi di generatori e basi di uno spazio vettoriale.....	" 412
157. Sulla dimensione di uno spazio vettoriale finitamente generato.....	" 416
158. Omoomorfismi ed isomorfismi fra spazi vettoriali di dimensione finita. Spazio vettoriale delle n-ple di un corpo.....	" 426
159. Moduli liberi. Spazi vettoriali di dimensione infinita....	" 432