

Luigi Amerio

# ANALISI MATEMATICA

con elementi di analisi funzionale

*Volume primo*

*Nuova edizione ampliata*

UTET

# INDICE

<i>Introduzione</i> .....	V
---------------------------	---

## **Capitolo 1 Insiemi e corrispondenze**

1. Insiemi di elementi. Simboli di inclusione e di appartenenza	1
2. Altri simboli. Proprietà dell'uguaglianza .....	3
3. Operazioni sugli insiemi: riunione, intersezione, complementazione (differenza), prodotto .....	4
4. Corrispondenze tra insiemi: funzioni .....	12
5. Funzioni a più valori .....	15

## **Capitolo 2 Numeri reali**

1. I successivi ampliamenti del concetto di numero. Successioni. Numerabilità dell'insieme dei numeri razionali. Potenza $n$ -esima del binomio. Il principio di induzione e gli assiomi di Peano .....	17
2. I numeri reali .....	29
3. Uguaglianza e disuguaglianza. Ordinamento dei numeri reali	33
4. Rappresentazione geometrica dei numeri reali .....	36
5. Operazioni sui numeri reali. Proprietà gruppali .....	38
6. Rappresentazione in base $m$ dei numeri reali .....	51

7.	Proprietà dell'insieme dei numeri reali: completezza; non numerabilità; disuguaglianza di Diofanto .....	57
8.	Insiemi di numeri reali. Intervalli .....	64
9.	Estremi di un insieme .....	65
10.	Proprietà topologiche. Interni. Punti di accumulazione. Insiemi chiusi .....	68
11.	Il teorema di Bolzano-Weierstrass .....	71

### Capitolo 3 Funzioni di una variabile

1.	Funzioni reali di una variabile reale .....	73
2.	Rappresentazioni di una funzione .....	75
3.	Il limite .....	83
4.	Limite infinito .....	86
5.	Limite per $x \rightarrow \infty$ .....	88
6.	Carattere topologico della definizione di limite. Teorema di unicità del limite .....	91
7.	Limite destro e limite sinistro .....	93
8.	Funzioni monotone: teorema di monotonia .....	96
9.	Massimo e minimo limite .....	100
10.	Il criterio di Cauchy per l'esistenza del limite finito .....	104
11.	Teoremi sui limiti .....	107
12.	Definizione generale di limite. Successioni. Successioni convergenti ad un punto di accumulazione di un insieme. Assioma di Zermelo .....	118
13.	Il numero $e$ .....	125
14.	Funzioni continue: lo spazio funzionale $C^0(T)$ .....	128
15.	Punti di discontinuità .....	131
16.	Estremi di una funzione. Punti di Weierstrass .....	133
17.	Funzioni continue in un insieme chiuso e limitato. Esistenza del massimo e del minimo (teorema di Weierstrass) .....	136
18.	Lemma di Heine-Borel. Continuità uniforme. Teorema di Heine .....	137
19.	Funzioni continue in un intervallo chiuso e limitato. Teorema degli zeri .....	141
20.	Funzioni composte di funzioni continue .....	145
21.	Inversione di una funzione monotona e continua: teorema della funzione inversa; radici $n$ -esime e potenze frazionarie .....	148
22.	La funzione esponenziale .....	153
23.	La funzione logaritmica .....	158

24. Risultati vari, collegati alle funzioni esponenziali e logaritmica .....	161
25. Le funzioni elementari dell'Analisi matematica .....	168

#### Capitolo 4 Calcolo differenziale per le funzioni di una variabile

1. Problemi che conducono al concetto di derivata .....	171
2. Definizione di derivata .....	174
3. Derivate di alcune funzioni elementari .....	177
4. Regole di derivazione .....	180
5. Elenco di derivate .....	192
6. Derivate successive. Formula di Leibniz. Gli spazi funzionali $C^n(T)$ , $C^\infty(T)$ .....	193
7. Punti di massimo o minimo. Teorema di Rolle .....	196
8. Teoremi di Cauchy e di Lagrange .....	199
9. Funzioni crescenti, o decrescenti, in un punto .....	202
10. Espressioni indeterminate: regola di De L'Hospital .....	206
11. Infinitesimi e infiniti. Teorema di confronto .....	218
12. Formule di Taylor e di Mac Laurin: resto di Lagrange e resto di Peano .....	222
13. Studio delle linee piane .....	229
14. Il differenziale .....	242
15. Regole di differenziazione .....	245
16. Calcolo numerico delle radici di un'equazione. Metodi delle tangenti e delle secanti .....	247

#### Capitolo 5 Calcolo integrale per le funzioni di una variabile

1. Problemi che conducono al concetto di integrale .....	257
2. L'integrale definito .....	263
3. Calcolo di un integrale definito .....	272
4. Proprietà dell'integrale definito .....	274
5. Il teorema della media .....	278
6. Dimostrazione dell'esistenza di una primitiva di una funzione continua. Teorema fondamentale del calcolo integrale. Integrale definito: deduzione dell'integrale definito .....	281
7. Integrazioni immediate .....	285
8. Metodi di integrazione .....	287
9. Integrali generalizzati (o impropri) .....	294
10. Calcolo numerico degli integrali. Integrazione grafica .....	307

## Capitolo 6 Funzioni di più variabili - Calcolo differenziale

1. Insiemi di punti nel piano e nello spazio .....	315
2. Insiemi di punti in uno spazio a $n$ dimensioni. Proprietà della distanza. Disuguaglianza di Schwarz .....	317
3. Definizioni e proprietà topologiche. Insiemi chiusi; insiemi aperti; frontiera di un insieme; insiemi connessi .....	322
4. Funzioni di più variabili .....	334
5. Limite, continuità, funzioni composte .....	336
6. Derivate parziali .....	342
7. Derivate successive. Teorema di Schwarz. Gli spazi funzionali $C^n(T)$ , $C^\infty(T)$ .....	345
8. Differenziale. Teorema del differenziale totale .....	349
9. Derivazione delle funzioni composte .....	355
10. Differenziali successivi .....	361
11. Formula di Taylor .....	363
12. Funzioni omogenee. Teorema di Eulero .....	369
13. Forme quadratiche .....	371
14. Studio di una superficie. Punti ellittici, iperbolici e parabolici .....	374
15. Massimi e minimi per le funzioni di più variabili .....	380
16. Proprietà invariantive del laplaciano e bello hessiano .....	385

## Capitolo 7 Il campo complesso: numeri, funzioni, matrici

1. I numeri complessi .....	389
2. Rappresentazione geometrica dei numeri complessi: il piano di Gauss. Forma trigonometrica dei numeri complessi .....	398
3. Rappresentazione geometrica e proprietà della somma, differenza, prodotto e quoziente .....	401
4. Radici $n$ -esime dei numeri complessi .....	404
5. Polinomi in una variabile complessa. Principio di identità .....	408
6. Operazioni sui polinomi .....	410
7. Massimo comun divisore di due o più polinomi .....	413
8. Decomposizione in fattori di primo grado. Equazioni a coefficienti reali .....	416
9. Funzioni complesse di variabile reale: limite, continuità, calcolo differenziale e integrale .....	419
10. Sistemi di equazioni algebriche lineari. Matrici: eguaglianza, addizione, moltiplicazione numerica, dipendenza e indipendenza lineare, trasposizione e aggiunta .....	422

11. Determinante di una matrice quadrata. Proprietà; sviluppo secondo gli elementi di una linea. Determinanti minori e caratteristica di una matrice. Calcolo numerico dei determinanti .....	429
12. Prodotto delle matrici e dei determinanti. Matrice unità e matrice reciproca. Interpretazione geometrica del prodotto: composizione delle trasformazioni lineari .....	439
13. Risoluzione dei sistemi lineari: regola di Cramer e teorema di Rouché. Sistemi lineari omogenei: autosoluzioni. Principio di sovrapposizione .....	447
14. Gruppi, anelli, campi. Proprietà gruppali dell'operazione di composizione .....	457
15. Matrici funzioni complesse di variabile reale: limite, continuità, calcolo differenziale e integrale. Derivazione dei determinanti .....	463

## **Capitolo 8 Calcolo vettoriale - Spazi vettoriali di dimensione finita**

1. Vettori .....	471
2. Operazioni sui vettori: somma, differenza e prodotto vettoriale .....	473
3. Prodotto di un vettore per un numero reale .....	477
4. Prodotto scalare di due vettori .....	478
5. Doppio prodotto misto di tre vettori .....	480
6. Rappresentazione cartesiana dei vettori. Il differenziale e il vettore gradiente .....	480
7. Vettori e punti variabili. Derivazione e integrazione .....	485
8. Spazi vettoriali .....	490
9. Varietà vettoriali di dimensione finita. Base di una varietà vettoriale .....	496
10. Prodotto scalare in uno spazio vettoriale $X$ complesso, ad $n$ dimensioni. Disuguaglianza di Schwarz. Proprietà della norma .....	502
11. Formulazione vettoriale del teorema di Rouché. Principio dell'alternativa .....	507

## **Capitolo 9 Linee in forma parametrica**

1. Linee in forma parametrica. Linee orientate. Linee regolari	517
--	-----

2. Tangente .....	523
3. Lunghezza di una linea: ascissa curvilinea .....	526
4. Piano normale .....	533
5. Piano osculatore .....	534
6. Normale e binormale. Piano rettificante. Triedro fondamentale .....	538
7. Prima curvatura, o flessione .....	542
8. Seconda curvatura, o torsione .....	545

## Capitolo 10 Integrali di linea - Forme differenziali lineari

1. Integrali di linea. Integrazione delle forme differenziali lineari .....	551
2. Derivazione sotto il segno di integrale .....	561
3. Forme differenziali lineari esatte .....	567

## Capitolo 11 Serie numeriche e di funzioni

1. Serie convergenti, divergenti, indeterminate .....	577
2. Criteri di Cauchy per la convergenza di una serie. Serie resto .....	581
3. Serie a termini positivi. Criteri di convergenza. Maggiorazione del resto .....	584
4. Serie assolutamente convergenti. Criteri di convergenza assoluta .....	592
5. Serie a termini di segno alternato .....	597
6. Operazioni sulle serie: somma, differenza, prodotto .....	599
7. Proprietà associativa e commutativa per le serie .....	604
8. Serie di funzioni. Convergenza puntuale e convergenza uniforme .....	610
9. Teorema sul limite di una serie uniformemente convergente di funzioni. Continuità della somma di una serie uniformemente convergente di funzioni continue .....	617
10. Derivazione per serie .....	621
11. Integrazione per serie .....	625
12. Serie di funzioni di più variabili. Serie di matrici .....	631

## Capitolo 12 Classi di equivalenza e concetto di numero

1. Classi di equivalenza .....	635
2. I numeri interi relativi .....	636
3. I numeri razionali .....	642
4. I numeri reali .....	647