

Luigi Amerio

ANALISI MATEMATICA

con elementi di analisi funzionale

Volume primo

Nuova edizione ampliata

UTET

INDICE

| | |
|---------------------------|---|
| <i>Introduzione</i> | V |
|---------------------------|---|

Capitolo 1 Insiemi e corrispondenze

| | |
|--|----|
| 1. Insiemi di elementi. Simboli di inclusione e di appartenenza | 1 |
| 2. Altri simboli. Proprietà dell'uguaglianza | 3 |
| 3. Operazioni sugli insiemi: riunione, intersezione, complementazione (differenza), prodotto | 4 |
| 4. Corrispondenze tra insiemi: funzioni | 12 |
| 5. Funzioni a più valori | 15 |

Capitolo 2 Numeri reali

| | |
|---|----|
| 1. I successivi ampliamenti del concetto di numero. Successioni. Numerabilità dell'insieme dei numeri razionali. Potenza n -esima del binomio. Il principio di induzione e gli assiomi di Peano | 17 |
| 2. I numeri reali | 29 |
| 3. Uguaglianza e disuguaglianza. Ordinamento dei numeri reali | 33 |
| 4. Rappresentazione geometrica dei numeri reali | 36 |
| 5. Operazioni sui numeri reali. Proprietà gruppali | 38 |
| 6. Rappresentazione in base m dei numeri reali | 51 |

| | | |
|-----|--|----|
| 7. | Proprietà dell'insieme dei numeri reali: completezza; non numerabilità; disuguaglianza di Diofanto | 57 |
| 8. | Insiemi di numeri reali. Intervalli | 64 |
| 9. | Estremi di un insieme | 65 |
| 10. | Proprietà topologiche. Interni. Punti di accumulazione. Insiemi chiusi | 68 |
| 11. | Il teorema di Bolzano-Weierstrass | 71 |

Capitolo 3 Funzioni di una variabile

| | | |
|-----|---|-----|
| 1. | Funzioni reali di una variabile reale | 73 |
| 2. | Rappresentazioni di una funzione | 75 |
| 3. | Il limite | 83 |
| 4. | Limite infinito | 86 |
| 5. | Limite per $x \rightarrow \infty$ | 88 |
| 6. | Carattere topologico della definizione di limite. Teorema di unicità del limite | 91 |
| 7. | Limite destro e limite sinistro | 93 |
| 8. | Funzioni monotone: teorema di monotonia | 96 |
| 9. | Massimo e minimo limite | 100 |
| 10. | Il criterio di Cauchy per l'esistenza del limite finito | 104 |
| 11. | Teoremi sui limiti | 107 |
| 12. | Definizione generale di limite. Successioni. Successioni convergenti ad un punto di accumulazione di un insieme. Assioma di Zermelo | 118 |
| 13. | Il numero e | 125 |
| 14. | Funzioni continue: lo spazio funzionale $C^0(T)$ | 128 |
| 15. | Punti di discontinuità | 131 |
| 16. | Estremi di una funzione. Punti di Weierstrass | 133 |
| 17. | Funzioni continue in un insieme chiuso e limitato. Esistenza del massimo e del minimo (teorema di Weierstrass) | 136 |
| 18. | Lemma di Heine-Borel. Continuità uniforme. Teorema di Heine | 137 |
| 19. | Funzioni continue in un intervallo chiuso e limitato. Teorema degli zeri | 141 |
| 20. | Funzioni composte di funzioni continue | 145 |
| 21. | Inversione di una funzione monotona e continua: teorema della funzione inversa; radici n -esime e potenze frazionarie | 148 |
| 22. | La funzione esponenziale | 153 |
| 23. | La funzione logaritmica | 158 |

| | | |
|-----|--|-----|
| 24. | Risultati vari, collegati alle funzioni esponenziali e logaritmica | 161 |
| 25. | Le funzioni elementari dell'Analisi matematica | 168 |

Capitolo 4 Calcolo differenziale per le funzioni di una variabile

| | | |
|-----|--|-----|
| 1. | Problemi che conducono al concetto di derivata | 171 |
| 2. | Definizione di derivata | 174 |
| 3. | Derivate di alcune funzioni elementari | 177 |
| 4. | Regole di derivazione | 180 |
| 5. | Elenco di derivate | 192 |
| 6. | Derivate successive. Formula di Leibniz. Gli spazi funzionali $C^n(T)$, $C^\infty(T)$ | 193 |
| 7. | Punti di massimo o minimo. Teorema di Rolle | 196 |
| 8. | Teoremi di Cauchy e di Lagrange | 199 |
| 9. | Funzioni crescenti, o decrescenti, in un punto | 202 |
| 10. | Espressioni indeterminate: regola di De L'Hospital | 206 |
| 11. | Infinitesimi e infiniti. Teorema di confronto | 218 |
| 12. | Formule di Taylor e di Mac Laurin: resto di Lagrange e resto di Peano | 222 |
| 13. | Studio delle linee piane | 229 |
| 14. | Il differenziale | 242 |
| 15. | Regole di differenziazione | 245 |
| 16. | Calcolo numerico delle radici di un'equazione. Metodi delle tangenti e delle secanti | 247 |

Capitolo 5 Calcolo integrale per le funzioni di una variabile

| | | |
|-----|---|-----|
| 1. | Problemi che conducono al concetto di integrale | 257 |
| 2. | L'integrale definito | 263 |
| 3. | Calcolo di un integrale definito | 272 |
| 4. | Proprietà dell'integrale definito | 274 |
| 5. | Il teorema della media | 278 |
| 6. | Dimostrazione dell'esistenza di una primitiva di una funzione continua. Teorema fondamentale del calcolo integrale. Integrale definito: deduzione dell'integrale definito | 281 |
| 7. | Integrazioni immediate | 285 |
| 8. | Metodi di integrazione | 287 |
| 9. | Integrali generalizzati (o impropri) | 294 |
| 10. | Calcolo numerico degli integrali. Integrazione grafica | 307 |

Capitolo 6 Funzioni di più variabili - Calcolo differenziale

| | |
|---|-----|
| 1. Insiemi di punti nel piano e nello spazio | 315 |
| 2. Insiemi di punti in uno spazio a n dimensioni. Proprietà della distanza. Disuguaglianza di Schwarz | 317 |
| 3. Definizioni e proprietà topologiche. Insiemi chiusi; insiemi aperti; frontiera di un insieme; insiemi connessi | 322 |
| 4. Funzioni di più variabili | 334 |
| 5. Limite, continuità, funzioni composte | 336 |
| 6. Derivate parziali | 342 |
| 7. Derivate successive. Teorema di Schwarz. Gli spazi funzionali $C^n(T)$, $C^\infty(T)$ | 345 |
| 8. Differenziale. Teorema del differenziale totale | 349 |
| 9. Derivazione delle funzioni composte | 355 |
| 10. Differenziali successivi | 361 |
| 11. Formula di Taylor | 363 |
| 12. Funzioni omogenee. Teorema di Eulero | 369 |
| 13. Forme quadratiche | 371 |
| 14. Studio di una superficie. Punti ellittici, iperbolici e parabolici | 374 |
| 15. Massimi e minimi per le funzioni di più variabili | 380 |
| 16. Proprietà invariantive del laplaciano e bello hessiano | 385 |

Capitolo 7 Il campo complesso: numeri, funzioni, matrici

| | |
|---|-----|
| 1. I numeri complessi | 389 |
| 2. Rappresentazione geometrica dei numeri complessi: il piano di Gauss. Forma trigonometrica dei numeri complessi | 398 |
| 3. Rappresentazione geometrica e proprietà della somma, differenza, prodotto e quoziente | 401 |
| 4. Radici n -esime dei numeri complessi | 404 |
| 5. Polinomi in una variabile complessa. Principio di identità | 408 |
| 6. Operazioni sui polinomi | 410 |
| 7. Massimo comun divisore di due o più polinomi | 413 |
| 8. Decomposizione in fattori di primo grado. Equazioni a coefficienti reali | 416 |
| 9. Funzioni complesse di variabile reale: limite, continuità, calcolo differenziale e integrale | 419 |
| 10. Sistemi di equazioni algebriche lineari. Matrici: eguaglianza, addizione, moltiplicazione numerica, dipendenza e indipendenza lineare, trasposizione e aggiunta | 422 |

| | |
|---|-----|
| 11. Determinante di una matrice quadrata. Proprietà; sviluppo secondo gli elementi di una linea. Determinanti minori e caratteristica di una matrice. Calcolo numerico dei determinanti | 429 |
| 12. Prodotto delle matrici e dei determinanti. Matrice unità e matrice reciproca. Interpretazione geometrica del prodotto: composizione delle trasformazioni lineari | 439 |
| 13. Risoluzione dei sistemi lineari: regola di Cramer e teorema di Rouché. Sistemi lineari omogenei: autosoluzioni. Principio di sovrapposizione | 447 |
| 14. Gruppi, anelli, campi. Proprietà gruppali dell'operazione di composizione | 457 |
| 15. Matrici funzioni complesse di variabile reale: limite, continuità, calcolo differenziale e integrale. Derivazione dei determinanti | 463 |

Capitolo 8 Calcolo vettoriale - Spazi vettoriali di dimensione finita

| | |
|--|-----|
| 1. Vettori | 471 |
| 2. Operazioni sui vettori: somma, differenza e prodotto vettoriale | 473 |
| 3. Prodotto di un vettore per un numero reale | 477 |
| 4. Prodotto scalare di due vettori | 478 |
| 5. Doppio prodotto misto di tre vettori | 480 |
| 6. Rappresentazione cartesiana dei vettori. Il differenziale e il vettore gradiente | 480 |
| 7. Vettori e punti variabili. Derivazione e integrazione | 485 |
| 8. Spazi vettoriali | 490 |
| 9. Varietà vettoriali di dimensione finita. Base di una varietà vettoriale | 496 |
| 10. Prodotto scalare in uno spazio vettoriale X complesso, ad n dimensioni. Disuguaglianza di Schwarz. Proprietà della norma | 502 |
| 11. Formulazione vettoriale del teorema di Rouché. Principio dell'alternativa | 507 |

Capitolo 9 Linee in forma parametrica

| | |
|--|-----|
| 1. Linee in forma parametrica. Linee orientate. Linee regolari | 517 |
|--|-----|

| | |
|--|-----|
| 2. Tangente | 523 |
| 3. Lunghezza di una linea: ascissa curvilinea | 526 |
| 4. Piano normale | 533 |
| 5. Piano osculatore | 534 |
| 6. Normale e binormale. Piano rettificante. Triedro fondamentale | 538 |
| 7. Prima curvatura, o flessione | 542 |
| 8. Seconda curvatura, o torsione | 545 |

Capitolo 10 Integrali di linea - Forme differenziali lineari

| | |
|---|-----|
| 1. Integrali di linea. Integrazione delle forme differenziali lineari | 551 |
| 2. Derivazione sotto il segno di integrale | 561 |
| 3. Forme differenziali lineari esatte | 567 |

Capitolo 11 Serie numeriche e di funzioni

| | |
|--|-----|
| 1. Serie convergenti, divergenti, indeterminate | 577 |
| 2. Criteri di Cauchy per la convergenza di una serie. Serie resto | 581 |
| 3. Serie a termini positivi. Criteri di convergenza. Maggiorazione del resto | 584 |
| 4. Serie assolutamente convergenti. Criteri di convergenza assoluta | 592 |
| 5. Serie a termini di segno alternato | 597 |
| 6. Operazioni sulle serie: somma, differenza, prodotto | 599 |
| 7. Proprietà associativa e commutativa per le serie | 604 |
| 8. Serie di funzioni. Convergenza puntuale e convergenza uniforme | 610 |
| 9. Teorema sul limite di una serie uniformemente convergente di funzioni. Continuità della somma di una serie uniformemente convergente di funzioni continue | 617 |
| 10. Derivazione per serie | 621 |
| 11. Integrazione per serie | 625 |
| 12. Serie di funzioni di più variabili. Serie di matrici | 631 |

Capitolo 12 Classi di equivalenza e concetto di numero

| | |
|-----------------------------------|-----|
| 1. Classi di equivalenza | 635 |
| 2. I numeri interi relativi | 636 |
| 3. I numeri razionali | 642 |
| 4. I numeri reali | 647 |