

ROBERTO CONTI

LEZIONI
DI
ANALISI MATEMATICA

VOLUME PRIMO



PADOVA

CEDAM - CASA EDITRICE DOTT. ANTONIO MILANI

1978

INDICE

0 - NOZIONI PRELIMINARI

0.1	Insiemi	1
0.2	Inclusione. Insieme vuoto	2
0.3	Proprietà definite in un insieme	3
0.4	Unione. Intersezione	4
0.5	Differenza. Complemento	5
0.6	Prodotto cartesiano di insiemi	6
0.7	Funzioni	8
0.8	Famiglie	12
0.9	Equivalenza	13
0.10	Ordine	14
0.11	Assioma della scelta	18
0.12	I numeri	19
0.13	Corpi commutativi ordinati	20
0.14	L'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali	22
0.15	Insiemi numerabili	26
0.16	Elementi di calcolo combinatorio	27
0.17	L'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi	30
0.18	L'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali	33
0.19	L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali	36
0.20	Radice n -esima aritmetica. Potenza ad esponente razionale	41
0.21	Potenze a esponente reale. Logaritmi	43
0.22	Il sistema dei numeri reali esteso	44
0.23	Complementi	45

1 - LO SPAZIO $\mathbb{R}$.

1.1	Norma in $\mathbb{R}$	63
-----	-----------------------	----

1.2	Metrica in $\mathbf{R}$	64
1.3	Intorni sferici (ρ -intorni). Interno (apertura)	64
1.4	Aperti. Topologia in $\mathbf{R}$. Teorema di Lindelöf	65
1.5	Insiemi chiusi	67
1.6	Chiusura (aderenza).	68
1.7	Derivato. Frontiera	69
1.8	Insiemi densi. Insiemi perfetti	70
1.9	Teorema di Bolzano-Weierstrass. Teorema di Cantor	71
1.10	Compatti. Teorema di Heine-Borel	73
1.11	Connessione	74

2 - SUCCESSIONI IN $\mathbf{R}$.

2.1	Successioni in $\mathbf{R}$. Punti limite	77
2.2	Classificazione delle successioni in $\mathbf{R}$	78
2.3	Successioni divergenti.	78
2.4	Successioni convergenti. Successioni regolari	79
2.5	Limite di una somma. Forma indeterminata $\infty - \infty$	81
2.6	Limite di un prodotto. Forma indeterminata $0 \cdot \infty$	82
2.7	Limite di un quoziente. Forme indeterminate $0/0, \infty/\infty$	84
2.8	Successioni monotone	85
2.9	Il numero e	86
2.10	Successioni di Cauchy. Completezza dello spazio $\mathbf{R}$	90
2.11	Minimo limite. Massimo limite	91

3 - FUNZIONI $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. ESTREMI, MONOTONIA, VARIAZIONE, CONVESSITA'.

3.1	Funzioni $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$	94
3.2	Esempi	96
3.3	Estremi	109
3.4	Estremi locali. Monotonia locale	110
3.5	Monotonia globale	112
3.6	Variazione	114
3.7	Convezività	119

4 - FUNZIONI $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. LIMITI.

4.1	Limiti: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$	122
4.2	Limiti: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$	127
4.3	Limiti: $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$	129

4.4	Limiti: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	133
4.5	Esempi	136
4.6	« $\lim \log = \log \lim$ »	139
4.7	« $\lim a^f = a^{\lim f}$ ». Forme indeterminate $0^0, 1^{-\infty}, 1^{+\infty}, +\infty^0$	141
4.8	Limiti di funzioni trigonometriche	143
4.9	Infinitesimi	146
4.10	Infiniti	150

5 - FUNZIONI $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. CONTINUITÀ'.

5.1	Continuità puntuale. Discontinuità	152
5.2	Classi di funzioni continue	154
5.3	Continuità in un insieme.	156
5.4	Continuità in un compatto	160
5.5	Continuità in un intervallo	160
5.6	Proprietà di Darboux	162
5.7	Continuità della funzione inversa	163
5.8	Continuità uniforme	164
5.9	Funzioni h�lderiane. Funzioni lipschitziane	166
5.10	Punti fissi	166
5.11	Equazioni numeriche	168
5.12	Complementi	171

6 - FUNZIONI $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. DIFFERENZIABILIT .

6.1	Derivata. Differenziale	178
6.2	Esempi	180
6.3	Derivabilit�, monotonia, continuit�	182
6.4	Regole di derivazione	183
6.5	Teoremi di Rolle e di Lagrange	192
6.6	Funzione derivata	195
6.7	Funzioni di classe $C^1(A)$	197
6.8	Derivata infinita. Derivate laterali	197
6.9	Derivata di una funzione convessa	201
6.10	Teorema di Cauchy	203
6.11	Regole di l'Hôpital. Forme indeterminate $0/0, \infty/\infty$	205
6.12	Trattamento delle forme indeterminate	212

7 - FUNZIONI $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. PRIMITIVE.

7.1	Primitive	216
-----	-----------	-----

7.2	Regole di integrazione	217
7.3	Integrali definiti	219
7.4	Calcolo di integrali indefiniti	221

8 - FUNZIONI $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. FORMULA DI TAYLOR.

8.1	Derivata di ordine k . Funzioni di classe $C^k(A)$	241
8.2	Formula di Taylor	243
8.3	Rappresentazioni dell'errore nella formula di Taylor	246
8.4	Applicazioni della formula di Taylor: estremi locali	250
8.5	Applicazioni della formula di Taylor: convessità, flessi	254
8.6	Costruzione del grafico di una funzione $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	255
8.7	Metodo di Newton	259

9 - NUMERI COMPLESSI.

9.1	Il sistema $\mathbb{C}$ dei numeri complessi	262
9.2	Addizione in $\mathbb{C}$	262
9.3	Moltiplicazione in $\mathbb{C}$	263
9.4	Numeri complessi reali	264
9.5	Il numero i . I numeri immaginari. Forma algebrica dei numeri complessi	265
9.6	Numeri complessi coniugati. Modulo	266
9.7	Rappresentazione geometrica e forma trigonometrica dei numeri complessi	267
9.8	Formule di De Moivre. Potenze a esponente intero. Formule trigonometriche	270
9.9	L'equazione $z^n = \alpha$. Radici dell'unità	273
9.10	Potenza a esponente razionale.	274

10 - LO SPAZIO $\mathbb{C}$.

10.1	Norma in $\mathbb{C}$	277
10.2	Metrica in $\mathbb{C}$	278
10.3	Proprietà topologiche di $\mathbb{C}$	279
10.4	Successioni in $\mathbb{C}$	280
10.5	Due esempi	281

11 - FUNZIONI $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

11.1	Funzioni $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$	283
------	--	-----

11.2	Limiti: $\lim_{z \rightarrow z_0} w(z) = l$	284
11.3	Il piano sfera	286
11.4	Limiti: $\lim_{z \rightarrow \infty} = l$, $\lim_{z \rightarrow z_0} w(z) = \infty$, $\lim_{z \rightarrow \infty} w(z) = \infty$	287
11.5	Continuità in un punto	289
11.6	Continuità in un insieme	290
11.7	Derivata	291
11.8	Derivata di ordine k . Formula di Taylor.	293
11.9	Polinomi	294
11.10	Funzioni razionali	301
11.11	Equazioni algebriche di 2°, 3° e 4° grado	305
11.12	Numeri algebrici. Numeri trascendenti	309

12 - SUCCESSIONI DI FUNZIONI.

12.1	Successioni di funzioni $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$	311
12.2	Convergenza uniforme	313
12.3	Teorema dei limiti e sue conseguenze	315
12.4	Successioni di funzioni $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$	319

Appendice - EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE ELEMENTARI	320
--	-----