

Gilles Christol

Équations différentielles p -adiques

Applications aux sommes exponentielles



HERMANN  ÉDITEURS DES SCIENCES ET DES ARTS

Table des matières

Préface	1
Résumé	6
I Sommes de caractères sur les corps finis	8
1 Caractères sur les corps finis	8
1.1 Caractères sur les groupes abéliens finis	8
1.2 Corps finis	10
1.3 Caractères multiplicatifs et additifs sur un corps fini	12
2 Sommes de caractères	14
2.1 Définition et exemples	14
2.2 Nombre de points d'une courbe algébrique : cas d'un revêtement de Kummer	16
2.3 Nombre de points d'une courbe algébrique : cas d'un revêtement d'Artin-Schreier	18
2.4 Fonctions L	20
2.5 Fonctions Zêta	22
3 Présentation des méthodes utilisées	25
3.1 Cohomologies p -adiques	25
3.2 Frobenius et formule des traces	26
II Analyse Ultramétrique	27
4 Corps ultramétriques	27
4.1 Anneaux ultramétriques	27
4.2 Lemmes de Hensel	28
4.3 Normes ultramétriques	30
4.4 Corps algébriquement clos	31
4.5 Calculs p -adiques	33
4.6 Représentants de Teichmüller	35
4.7 Corps maximalement complets	37
5 Éléments analytiques	38
5.1 Valeurs absolues sur $\mathbb{C}_p[x]$	38
5.2 Ensembles affinoïdes convexes et fractions rationnelles	41
5.3 Théorème de Mittag-Leffler	44
5.4 Fonctions analytiques dans une couronne	48
5.5 L'anneau $H(A)$	54

6	Espaces dague de Monsky-Washnitzer	59
6.1	Espaces dague	59
6.2	Résidus	61
6.3	Dualité	64
6.4	Intégrale de Cauchy et dualité algébrique	66
6.5	Dualité topologique	68
7	Opérateurs à indice	72
7.1	Propriétés algébriques	72
7.2	Cas des espaces de Banach	74
7.3	Indices généralisés	79
8	Opérateurs à trace	84
8.1	Bases orthogonales	84
8.2	Opérateurs complètement continus	86
8.3	Opérateurs nucléaires	92
III	Formule de l'indice	101
9	Solution dans le disque générique. Principe de Transfert	101
9.1	Disque générique	101
9.2	Solution au voisinage du point générique	102
9.3	Spécialisation dans un disque ordinaire	106
10	Indice dans un disque. Cas d'un opérateur non soluble	107
10.1	Existence de l'indice	107
10.2	Calcul de l'indice	110
10.3	Formule d'additivité	114
10.4	Sens de variation de l'indice	115
10.5	Exemples de calcul d'indices	117
10.6	p -courbure	119
11	Indice dans un disque. Cas d'un opérateur soluble	122
11.1	Non existence de l'indice dans le cas soluble	122
11.2	Caractérisation des opérateurs solubles	124
11.3	Nombres de Liouville p -adique	127
11.4	disques singulier-régulier	130
12	Indice dans un disque. Cas Général	134
12.1	Formule de l'indice	134
12.2	Estimation de l'indice	136
13	Irrégularité	137
13.1	Irrégularité d'un opérateur différentiel dans un disque.	137
13.2	Exponentielles de Artin-Hasse généralisées	140
13.3	Application à l'irrégularité	145
13.4	Irrégularité en un point	147

IV Cohomologies de Monsky-Washnitzer	150
14 Modules différentiels	150
14.1 Définition	150
14.2 Formule de changement de base	151
14.3 Exposants	152
14.4 Réduction au cas des fractions rationnelles	152
15 Complexe de De Rham	154
15.1 Espaces de cohomologie	154
15.2 Module trivial	155
15.3 Le théorème de décomposition	157
15.4 Calcul de la cohomologie dans le cas de rang un	159
16 L'exemple fondamental	161
16.1 Le module différentiel M	161
16.2 Première réduction	162
16.3 Deuxième réduction	162
16.4 Calcul de la cohomologie	164
V Frobenius	166
17 Les opérateurs ϕ et ψ	166
17.1 Propriétés formelles	166
17.2 Action sur les polynômes	167
17.3 Actions sur les fractions rationnelles	171
17.4 Action sur les fonctions et éléments analytiques	171
17.5 Action sur les espaces dague	173
18 Foncteurs de Frobenius et de Dwork	175
18.1 Foncteur de Frobenius	175
18.2 Successeur : unicité	177
18.3 Successeur : existence	184
18.4 Structure de Frobenius forte	188
18.5 Exemples de successeurs	189
18.6 Foncteur de Dwork	193
VI : Sommes de caractères et fonctions L	199
19 La formule de trace	199
19.1 Trace de l'opérateur $\hat{\psi}_0 \circ H$	199
19.2 Trace de l'application de Dwork	202
20 Relèvement des caractères	204
20.1 Relèvement des caractères multiplicatifs	204
20.2 Caractères multiplicatifs sur les extensions	206
20.1.1 La fonction θ	207
20.1 Relèvement des caractères additifs	210
20.2 Caractères additifs sur les extensions	211

21 Sommes de caractères et fonction L	212
21.1 Expression des sommes de caractères	212
21.2 Cohomologie associée aux sommes de caractères et fonctions L	213
21.3 Degré des fonctions L	215
21.4 Sommes de Gauss	217
21.5 Formule de Gross-Koblitz ($p \neq 2$)	218
21.6 Sommes de Jacobi	221
21.7 Sommes de Kloosterman	222
VII Théorie duale	223
22 Complexe dual	223
22.1 Module différentiel dual	223
22.2 Application symplectique	227
22.3 Action de Frobenius	228
22.4 Transposées des applications de Dwork et de Frobenius	228
23 Autodualité	230
23.1 Cup-produit	230
23.2 Equation fonctionnelle des fonctions L	232
23.3 Exemples	235