

GIUSEPPE ZWIRNER

LEZIONI DI ANALISI MATEMATICA

PARTE PRIMA

FUNZIONI DI UNA VARIABILE

NUOVA EDIZIONE



CASA EDITRICE DOTT. ANTONIO MILANI

1976

INDICE

CAP. I. — CALCOLO COMBINATORIO

Disposizioni semplici di n oggetti	Pag. 1
Permutazioni semplici di n oggetti	» 2
Combinazioni semplici di n oggetti	» 3
Formula del binomio di Newton	» 8
Alcune disuguaglianze	» 14
Classe di una permutazione	» 16

CAP. II. — NUMERI REALI

Le sezioni del campo razionale	» 17
Definizione di numero reale	» 24
Confronto dei numeri reali	» 25
Operazioni con i numeri reali	» 27
Continuità del campo dei numeri reali	» 40
Osservazione sui numeri reali razionali	» 43
Classi contigue di numeri reali	» 45
Potenza con esponente intero di un numero reale	» 45
Radice ennesima aritmetica di un numero reale positivo	» 47
Potenza ad esponente razionale di un numero reale	» 49
Potenza con esponente reale	» 50
Equazione esponenziale. Logaritmi	» 52
Rappresentazione geometrica dei numeri reali. Il postulato della continuità della retta	» 54
Alcune disuguaglianze fra numeri reali	» 57

CAP. III. — NUMERI COMPLESSI

Generalità	» 58
Definizioni fondamentali	» 59
Il campo numerico complesso. Sottocampo dei numeri complessi reali	» 66
Forma algebrica dei numeri complessi	» 67
Sui moduli dei numeri complessi	» 71
Rappresentazione geometrica dei numeri complessi	» 72
Forma trigonometrica dei numeri complessi	» 73

Prodotto di numeri complessi scritti sotto forma trigonometrica	Pag. 75
Quoziente di due numeri complessi scritti sotto forma trigonometrica ..	» 76
Potenza con esponente intero di un numero complesso scritto sotto forma trigonometrica	» 77
Radici ennesime dei numeri complessi	» 79
Radici ennesime dell'unità	» 83

CAP. IV. — MATRICI E DETERMINANTI

Matrici. Definizioni relative	» 85
Determinante di una matrice quadrata	» 87
Prime proprietà dei determinanti	» 93
Complemento algebrico di un elemento di una matrice quadrata ...	» 96
Sviluppo di un determinante secondo gli elementi di una data linea ..	» 97
Altre proprietà dei determinanti	» 102
Prodotto di due matrici quadrate d'ordine n	» 108
Matrice aggiunta di una matrice	» 110
Matrice reciproca di una matrice	» 111
Matrici quadrate ortogonali	» 112
Determinante di Vandermonde	» 114
Minori di una matrice. Caratteristica	» 117
Proprietà della caratteristica di una matrice	» 120
Moltiplicazione di matrici rettangolari: Il teorema di Binet	» 128

CAP. V. — SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI

Generalità	» 130
Sistemi di n equazioni lineari in n incognite. Teorema di Cramer ..	» 132
Sistemi di m equazioni lineari in n incognite. Teorema di Rouché-Capelli ..	» 136
Sistemi di equazioni lineari e omogenee	» 145
Sistemi di $n-1$ equazioni lineari ed omogenee con n incognite	» 147

CAP. VI. — FUNZIONI RAZIONALI INTERE ED EQUAZIONI ALGEBRICHE

Funzioni razionali intere	» 151
Principio d'identità delle funzioni razionali intere	» 152
Divisione fra funzioni razionali intere	» 154
Teorema di Ruffini	» 159
Massimo comune divisore di due o più funzioni razionali intere ...	» 160
Il teorema fondamentale dell'algebra	» 162
Ordine di uno zero di una funzione razionale intera	» 163
Decomposizione in fattori lineari di una funzione razionale intera nel campo complesso	» 164
Sulle funzioni razionali intere nel campo reale: decomposizione in fattori lineari e quadratici	» 166
Equazioni algebriche	» 169
Relazioni fra coefficienti e radici di una equazione algebrica	» 170

CAP. VII. — ELEMENTI DI TEORIA DEGLI INSIEMI

Il concetto di insieme	Pag. 172
Insiemi eguali	» 173
Sottoinsiemi di un insieme. Insieme delle parti	» 174
Unione ed intersezione di insiemi. Differenza di insiemi	» 175
Prodotto cartesiano di insiemi	» 177
Partizione e ricoprimento	» 179
Applicazioni	» 180
Restrizione di un'applicazione	» 186
• Applicazioni composte	» 186
Applicazioni inverse	» 189
Diagramma o grafico di un'applicazione	» 190
Esempi di grafici di funzioni reali di una variabile reale	» 191
Assioma della scelta	» 194
Insiemi equipotenti. Insiemi numerabili	» 195

CAP. VIII. — INSIEMI DI NUMERI REALI

Gli intervalli	» 200
Estremo superiore ed inferiore di un insieme limitato di numeri reali	» 202
Estremo superiore ed inferiore di un insieme non limitato di numeri reali	» 207
Intorni di un numero o punto di R	» 208
Numeri o punti di accumulazione	» 210
Punti interni, esterni e di frontiera	» 213
Insiemi aperti. Insiemi chiusi	» 215
Insieme derivato. Chiusura di un insieme e il nucleo aperto di un insieme	» 217
Insiemi densi. Insiemi perfetti	» 219
Teorema di Pincherle-Borel	» 220
La non numerabilità dell'insieme dei numeri reali	» 222

CAP. IX. — FUNZIONI REALI DI UNA VARIABILE REALE

Funzioni reali di una variabile reale	» 223
Estremi di una funzione	» 225
Funzioni monotone	» 227
Funzioni inverse delle funzioni circolari	» 228
Teorema di Weierstrass	» 230

CAP. X. — LIMITI DELLE FUNZIONI REALI DI UNA VARIABILE REALE

Introduzione	» 233
Definizione di limite finito per una funzione in un punto	» 234
Limite sinistro e destro di una funzione in un punto	» 239
Definizione di limite infinito in un punto	» 242
Definizione di limite per una funzione all'infinito	» 244
Primi teoremi sui limiti	» 247

Operazioni sui limiti	Pag. 251
Teorema della permanenza del segno	» 260
Teoremi di confronto	» 261
Limiti delle funzioni monotone	» 263
Limiti delle funzioni composte	» 265
Il criterio di Cauchy per l'esistenza di un limite finito	» 267
Successione di numeri reali	» 270
Successione di numeri complessi	» 277

CAP. XI. — FUNZIONI REALI CONTINUE DI UNA VARIABILE REALE

La nozione di continuità per le funzioni reali di una variabile reale	» 279
Prime proprietà delle funzioni continue	» 280
Continuità delle funzioni elementari	» 281
Continuità delle funzioni composte	» 284
Funzioni continue in insiemi chiusi e limitati	» 285
La continuità uniforme	» 290
Continuità delle funzioni inverse	» 294
Punti di discontinuità per una funzione	» 295
Calcolo di alcuni limiti fondamentali	» 297

CAP. XII. — DERIVATE DELLE FUNZIONI REALI DI UNA VARIABILE REALE

Problemi che conducono al concetto di derivata	» 306
Definizione di derivata	» 309
Significato geometrico della derivata	» 315
Derivate di alcune funzioni elementari	» 317
Regole di derivazione	» 322
Riassunto delle derivate delle funzioni più comuni	» 334
Derivate di ordine superiore	» 335

CAP. XIII. — I TEOREMI FONDAMENTALI DEL CALCOLO DIFFERENZIALE PER LE FUNZIONI REALI DI UNA VARIABILE REALE

Teorema di Rolle	» 337
Teorema di Lagrange o del valor medio	» 340
Conseguenze del teorema di Lagrange	» 342
Teorema di Cauchy o degli incrementi finiti	» 344
Conseguenze del teorema di Cauchy	» 345
Formula di Taylor col termine complementare nella forma di Lagrange	» 349
La formula di Taylor col termine complementare nella forma di Peano	» 351
Approssimazione della funzione $f(x)$ mediante una funzione razionale intera	» 352
Regola di De l'Hospital	» 355
Massimi e minimi relativi	» 366
Massimi e minimi relativi delle funzioni derivabili	» 368
Ricerca del massimo e del minimo assoluto di una funzione continua	» 374
Convessità e concavità di una funzione reale di una variabile reale, in un punto ed in un intervallo	» 376

Asintoti	Pag. 382
Studio del grafico di una funzione reale di variabile reale	» 385
Calcolo approssimato delle radici di una equazione	» 388

CAP. XIV. — INFINITESIMI ED INFINITI. DIFFERENZIALI

Infinitesimi	» 395
Confronto di infinitesimi	» 396
Ordine di un infinitesimo	» 397
Parte principale prima di un infinitesimo rispetto ad un infinitesimo	» 400
Il principio di sostituzione degli infinitesimi	» 402
Parti principali successive di un infinitesimo rispetto ad un infinitesimo	» 403
Infiniti e loro confronto	» 405
Differenziale primo	» 407
Significato geometrico del differenziale	» 409
Regole per la differenziazione	» 410
Differenziali successivi	» 411

CAP. XV. — INTEGRALI DELLE FUNZIONI REALI DI UNA VARIABILE REALE

Premesse	» 414
Area del trapezoide	» 415
Integrale definito per una funzione reale continua di variabile reale	» 421
Proprietà dell'integrale definito	» 424
Teorema della media	» 428
Conseguenze del teorema della media	» 430
Teorema della media generalizzato	» 430
Area di un dominio normale	» 431
Funzioni primitive	» 433
Funzioni integrali	» 434
Teorema fondamentale del calcolo integrale per le funzioni continue	» 436
Integrale indefinito di una funzione continua	» 438
Integrali indefiniti immediati	» 439
Integrazione elementare indefinita per semplici trasformazioni della funzione integranda	» 440
Integrazione elementare indefinita per scomposizione in somma	» 443
Metodo d'integrazione per parti	» 444
Metodo d'integrazione per sostituzione	» 447
Integrazione delle funzioni razionali fratte	» 449
Metodo d'integrazione per razionalizzazione	» 456
Integrazione indefinita dei differenziali binomi	» 462
Altri tipi di integrali indefiniti	» 463
Regole d'integrazione definita	» 466
Calcolo approssimato degli integrali definiti	» 474
Integrali impropri su intervalli limitati	» 478
Condizioni di integrabilità	» 482
Integrali impropri su intervalli illimitati	» 486
Condizioni di integrabilità	» 488

CAP. XVI. — LE SERIE NUMERICHE

Nozione di serie numerica reale	Pag. 491
La serie geometrica	» 495
Proprietà distributiva, proprietà associativa	» 497
Resto di una serie	» 499
Criterio generale di convergenza o di Cauchy	» 502
Criteri di convergenza e divergenza. Convergenza assoluta	» 505
Proprietà commutativa per le serie numeriche	» 519
Operazioni sulle serie numeriche	» 523
Serie a termini complessi	» 527

CAP. XVII. — SUCCESIONI E SERIE DI FUNZIONI REALI DI UNA VARIABILE REALE

Convergenza di una successione di funzioni	» 530
Convergenza uniforme	» 534
Teorema per l'inversione dei limiti	» 535
Passaggio al limite sotto il segno di derivata	» 537
Passaggio al limite sotto il segno d'integrale	» 540
Serie di funzioni	» 541
Convergenza uniforme	» 544
Convergenza totale	» 546
Teoremi del limite e della continuità per le serie di funzioni	» 548
Derivazione termine a termine di una serie di funzioni	» 550
Integrazione termine a termine di una serie di funzioni	» 551
Serie di potenze	» 553
Intervallo di convergenza di una serie di potenze	» 555
Convergenza uniforme delle serie di potenze	» 558
La serie derivata di una serie di potenze	» 558
Sulla somma di una serie di potenze	» 560
Serie di Mac Laurin	» 562
Sviluppo in serie di Mac Laurin di alcune funzioni elementari	» 567
Serie di Taylor	» 576
Cenni sulle serie di potenze nel campo complesso	» 578
Le funzioni seno, coseno, tangente	» 579
La funzione esponenziale	» 580
Le formule di Eulero	» 581
Studio delle funzioni $\sin z$ e $\cos z$	» 582
La funzione logaritmo	» 584
Potenza di base complessa ad esponente complesso	» 587
Le funzioni arco seno, arco coseno, arco tangente	» 590
Funzioni iperboliche	» 592